din gîndirea matematică românească

solomon marcus

272.416

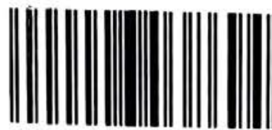


dan barbilian
pius șerban coculescu
alexandru froda
matila c. ghyka
spiru haret
gheorghe mihoc
grigore c. moisil
miron nicolescu
octav onicescu
dimitrie pompeiu
simion stoilow
gabriel sudan
florin vasilescu

Scanned with CamScanner

solomon marcus

din gîndirea matematică românească



Editura științifică și enciclopedică
București, 1975

Scanned with CamScanner

PREFAȚĂ

Autorul lucrării *Din gîndirea matematică românească* este un matematician de deosebit prestigiu, cunoscut tuturor specialiştilor din centrele ştiinţifice de la noi şi din afară, dublat de un lingvist situat la frontiera dintre matematică şi lingvistică. În domeniul lingvisticii matematice, el a făcut operă de pionierat, care îl situează printre fondatorii acestei discipline.

Spirit critic, înzestrat cu o mare putere de analiză, dar şi de sinteză, profesorul S. Marcus a fost condus în mod natural la întocmirea lucrării de mai sus, care constituie o adevărată operă de cercetare. Iar cunoştinţele sale vaste aveau să constituie garanţia unei depline reuşite.

Titlul însuşi al lucrării *Din gîndirea matematică românească* indică de la început o limitare impusă de autor cadrului studiului său. Din curgerea continuă a fluxului cercetării matematice româneşti, autorul a selectat acele momente care l-au impresionat cel mai mult — şi acele figuri de savanţi ale căror opere, sau al căror învăţămînt, au contribuit în cea mai mare măsură la desăvîrşirea propriei sale personalităţi.

Autorul nu a dorit şi nici nu a încercat să facă o prezentare a vieţii şi operei oamenilor de ştiinţă pe care îi întîlnim în lucrare. Cititorul nu va găsi aici anul naşterii lui Stoilow, nici anul morţii lui Barbilian, nici amănunte privind studiile universitare ale lui Moisil. El va afla din paginile acestei lucrări ceva mai puţin şi în acelaşi timp mult mai mult decît se poate găsi într-o istorie — uniformizantă prin forţa lucrurilor. El va descoperi acele idei din operele lui Stoilow, Pompeiu, Vasilescu etc. care au contribuit la creşterea patrimoniului ştiinţei universale şi în acelaşi timp la afirmarea prestigioasă a cercetării matematice româneşti.

Am avut privilegiul să cunosc impulsul iniţial al lucrării de faţă. Autorul şi-a notat, de-a lungul anilor, acele idei fertile din operele oamenilor de ştiinţă studiaţi, care au fost uitate sau care au fost ignorate şi apoi puse în circulaţie sub alte semnături. Cu o rîvnă demnă de admirat, prof. S. Marcus restabileşte prioritatea unor cercetări făcute de Pompeiu, de Stoilow, de Froda, de Sudan, de Moisil.

Printre lucrările uitate, autorul aminteşte de *Mecanica socială* a lui Haret, în care, sub învelişul formal al analogiilor matematice, prof. Mircea Maliţa a descoperit recent originea unor noţiuni astăzi foarte importante în disciplinele de frontieră dintre matematică şi ştiinţele sociale.

La lista autorilor pomeniţi, autorul adaugă doi savanţi aproape complet ignoraţi la noi, care — deşi de obîrşie românească — şi-au desfăşurat în întregime activitatea lor ştiinţifică în afara frontierelor ţării şi şi-au scris toată opera lor în limba franceză. Este vorba de Pius Şerban Coculescu (cunoscut publicului sub numele de Pius Servien) şi de Matila Ghyka. Opera lor se bucură astăzi în lumea ştiinţifică internaţională de o apreciere sensibil superioară aceleia de care s-a bucurat în momentul în care

Scanned with CamScanner

a fost scrisă (cu peste patru decenii în urmă). Ambii autori au fost nişte precursori în discipline care s-au închegat abia în ultimii ani şi de aceea reamintirea meritelor lor deosebite constituie un act de justiţie în faţa istoriei. Iar încorporarea lor în galeria oamenilor de cultură şi de ştiinţă români (aşa cum s-a procedat anterior cu Gogu Constantinescu, Henri Coandă sau George S. Palade) este un act de restituire pentru care trebuie să fim recunoscători autorului.

Lectura lucrării lui S. Marcus a constituit pentru mine o înaltă desfătare, graţie stilului său cald, direct, simplu, stil de adevărat povestitor, care ştie să conducă cititorul chiar pe drumurile mai dificile ale unor dezvoltări cu caracter tehnic, atunci cînd astfel de drumuri apar. Nu este nevoie să fii specialist şi nici măcar matematician în sensul larg al cuvîntului pentru a înţelege importanţa pentru matematici şi mai ales fertilitatea multora dintre ideile generos răspîndite în paginile lucrărilor savanţilor amintiţi. După cum nu este nevoie de o argumentaţie suplimentară pentru ca cititorul care va ajunge la capătul lecturii unei astfel de cărţi să înţeleagă marea importanţă a ei pentru tinerii epocii noastre, dar mai ales pentru învăţaţii de mîine ai patriei noastre, care vor fi curioşi să pătrundă cît de cît în tainele creaţiei înaintaşilor, altfel decît prin lectura unui articol din dicţionar.

Prin cartea sa, prima de acest gen scrisă în ţara noastră, prof. S. Marcus aduce un insign serviciu ştiinţei şi culturii româneşti*.

MIRON NICOLESCU

26 mai 1975

* Textul de faţă a fost scris de către profesorul Miron Nicolescu — ca referat solicitat de editură — cu o lună înaintea morţii sale, survenite la 30 iunie 1975. Autorul, de comun acord cu editura, a hotărît să-l publice sub formă de prefaţă.

Scanned with CamScanner

DIN ISTORIA UNOR FRUSTRĂRI

Cartea de față este alcătuită din două părți. În prima parte ne ocupăm mai întîi de evoluția preocupărilor românești de teoria funcțiilor reale, distingînd, în cadrul ei, cinci etape de dezvoltare ; lui Dimitrie Pompeiu, reprezentantul unic al primei etape, îi consacrăm un întreg capitol, după care cîte un capitol este dedicat fiecăruia dintre cei doi reprezentanți ai etapei a doua, Simion Stoilow și Florin Vasilescu. Din etapa a treia, reprezentată prin cîteva personalități de seamă, nu am ales, pentru o tratare distinctă, decît pe Alexandru Froda, care face obiectul ultimului capitol al primei părți. În a doua parte a cărții, dedicată unor interferențe ale gîndirii matematice românești cu unele domenii umaniste, ne ocupăm de matematicianul-poet Dan Barbilian, de esteticienii și filozofii puternic impregnați de spiritul științelor exacte, Pius Șerban Coculescu (cunoscut mai mult sub pseudonimul Pius Servien) și Matila C. Ghyka și de Grigore C. Moisil.

O selecție a unor personalități atît de eterogene poate părea arbitrară atîta vreme cît ne situăm în perspectiva unei expuneri care și-ar propune o prezentare cît mai obiectivă și mai sistematică a istoriei matematicii românești. Poate stîrni de asemenea mirare faptul că am considerat opera lui Servien ca o manifestare a gîndirii matematice ; mulți dintre colegii mei matematicieni se vor fi întrebînd cine este acest matematician de care n-au auzit și ce teoreme a demonstrat el. Este de asemenea vizibilă o lipsă de unitate în ceea ce privește modul de abordare, deoarece în timp ce în discutarea unor personalități ca Pompeiu, Stoilow și Vasilescu sînt urmărite, de fiecare dată, repercusiunile și ecourile unui singur fapt matematic, la Dan Barbilian ne-au preocupat personalitatea umană și unele probleme de limbaj, la Alexandru Froda am urmărit cu precădere trăsăturile generale ale operei și personalității sale, iar la Pius Șerban Coculescu a stat în centrul atenției

noastre un anume mod în care nişte idei foarte crude din punct de vedere matematic, dar foarte susceptibile de a primi o formalizare riguroasă, au devenit punctul de plecare al unui proces de modelare matematică a unor aspecte foarte importante privind structura generală a limbajelor umane de creaţie (ştiinţifică sau artistică) şi fundamentarea unei estetici ştiinţifice.

Aceste mirări şi semne de întrebare se vor risipi — credem — dacă vom spune că această carte este în mod deliberat foarte subiectivă, că prin ea propunem cititorilor o anumită lectură, care nu pretinde să fie decît una din multele lecturi posibile ale operelor matematice româneşti. Selecţia pe care am operat-o a fost determinată într-o măsură atît de mare de elemente care ţin de propria noastră biografie ştiinţifică, încît cartea de faţă poate fi considerată ca un mănunchi de mărturisiri ale unor experienţe care ne-au adus în contact cu cîteva opere şi personalităţi remarcabile ale culturii noastre. Aceste opere şi personalităţi s-au insinuat treptat, dar cu complicitatea noastră, atît de mult în propriile noastre preocupări, încît acum, cînd recitim paginile de faţă, elaborate de-a lungul a cîtorva ani, avem uneori impresia că am scris o carte autobiografică. Această impresie este foarte puternică în ceea ce priveşte capitolele dedicate lui Pompeiu, Stoilow, Moisil şi Pius Şerban Coculescu, deoarece multe din cercetările noastre s-au referit nemijlocit la rezultate sau idei ale lor, cărora le-am urmărit cu emoţie destinul, aşa cum am încercat să-l convingem pe cititor în capitolele corespunzătoare. În ceea ce-i priveşte pe Vasilescu, Barbilian, Ghyka şi Froda, ei nu au intrat încă *direct* în orbita preocupărilor noastre, dar, prin rezonanţa pe care unele aspecte ale personalităţii şi operei lor au produs-o, ei au influenţat în mod decisiv preocupările noastre şi preocupările pe care am căutat să le insuflăm unor colegi mai tineri şi unor studenţi.

Vom căuta acum să descriem unele aspecte ale ideilor şi rezultatelor pe care le analizăm în cartea de faţă.

a) La fiecare dintre autorii discutaţi, atenţia este îndreptată fie către un rezultat care a trecut multă vreme neobservat (Stoilow, Vasilescu), fie către un rezultat considerat multă vreme periferic în ansamblul operei din care el face parte (Pompeiu), fie către unele idei şi probleme care abia în ultima vreme au început a fi fructificate (Servien, Ghyka) sau aşteaptă încă să fie aprofundate (Barbilian,

Froda). De fiecare dată deci este în discuţie un fapt căruia încercăm să-i dezvăluim un tîlc mult mai adînc decît cel care a putut fi sesizat anterior. Este, credem, o obligaţie faţă de opera ştiinţifică a predecesorilor de a o reconsidera în mod periodic şi de a o reciti cu înţelegerea pe care ne-o dă cea mai recentă dezvoltare a ştiinţei. Vom constata atunci că operele ştiinţifice autentice se află într-o continuă devenire, ele nu sînt obiecte, ci procese a căror evoluţie depăşeşte considerabil intenţiile iniţiale ale autorului, sau pur şi simplu se dezvoltă în direcţii diferite (uneori chiar contrarii) de cele scontate de autor. Cele relatate în capitolele consacrate lui Pompeiu, Stoilow, Vasilescu şi Servien sînt, credem, semnificative din acest punct de vedere. Aceeaşi situaţie apare şi în preocupările de didactică a ştiinţei. Să luăm, de exemplu, o disciplină cu o veche istorie, analiza matematică. Un manual care expune noţiunile şi rezultatele de început ale acestei discipline este departe de a fi univoc în prezentarea faptelor; prin accentele pe care le pune pe anumite lucruri în dauna altora, prin exemplele şi aplicaţiile pe care le dezvoltă, prin modul în care explică originea noţiunilor, motivează alegerea convenţiilor şi explică semnificaţiile teoremelor, un astfel de manual poate să-l conducă pe cititor fie spre funcţii de variabilă complexă, fie spre ecuaţii diferenţiale, fie spre funcţii de variabilă reală, fie spre analiză numerică, fie spre analiză funcţională. Cei care cunosc tratatele clasice de analiză matematică ştiu că chiar aceasta este situaţia. Fiecare profesor imprimă, deliberat sau nu, — chiar cursului celui mai elementar pe care-l predă studenţilor — o orientare spre propriul său domeniu de preocupări (evident, în ipoteza că un atare domeniu există şi că este vorba de un curs propriu, nu de unul de compilaţie).

b) În ciuda situaţiei periferice, secundare pe care o prezintă iniţial multe din rezultatele, ideile şi problemele luate în discuţie, consecinţele pe care ele le-au dezvoltat în perioada de cîteva decenii care s-a scurs de la apariţia lor se dovedesc a fi de o deosebită amploare. Derivata lui Pompeiu, teorema lui Stoilow asupra structurii funcţiilor continue, teorema lui Vasilescu asupra aproximării funcţiilor arbitrare prin funcţii continue, teoremele lui Froda asupra discontinuităţilor, problemele de limbaj ridicate de textele lui Barbilian şi ideea lui Servien de a considera proprietatea de a admite fraze echivalente drept proprietatea funda-

B.C.U. „M. EMINESCU" IAŞI

mentală a frazelor din limbajul științific fie că și-au reliefat mereu noi și noi semnificații și consecințe, fie că așteaptă (ca în cazul lui Froda) pe cel care le va descifra.

c) Ni se pare interesant de observat că aproape fiecare dintre personalitățile discutate a fost, într-o măsură mai mare sau mai mică, victima unui proces de frustrare ale cărui dimensiuni cresc pe măsură ce faptele sînt cunoscute sub toate aspectele lor. Nu avem în vedere aici doar frustrarea explicită, publică, de tipul celeia care l-a afectat pe Pompeiu, care a trebuit să aștepte nota de confirmare a lui Denjoy pentru a nu mai fi suspectat că funcțiile sale sînt identic nule. Acest mod public de a contesta și, apoi, de a recunoaște valoarea unui rezultat nu numai că neutralizează frustrarea inițială, dar o transformă în contrariul ei, conferind rezultatului incriminat o deosebită popularitate. Avem în vedere o frustrare mult mai dureroasă și mai gravă, cu efecte mult mai profunde, acea frustrare care se manifestă nu prin contestare, ci prin ignorare. Această trecere sub tăcere a unui rezultat, a unei idei, a unui nume, ca și cum acestea n-ar exista, este cea mai ucigătoare dintre frustrări, ea riscă, prin proporțiile pe care, din păcate, le capătă, să denatureze istoria științei și chiar știința însăși. Invităm pe cititor ca asupra acestui aspect al cărții de față să se aplece cu deosebire. Paginile ei se vor piese la dosarul unui proces de recuperare a unor rezultate pe care mulți autori le-au ignorat sau le-au diminuat timp de decenii. Menționăm aici doar o mică parte a lor: Cum s-a putut preda atîția ani analiza matematică, fără a se observa că derivata lui Pompeiu constituie cel mai simplu și mai elementar exemplu de funcție care admite primitivă, dar nu este integrabilă pe nici un interval? Cum s-a putut scrie în atîtea tratate capitolul relativ la structura diferențială a funcțiilor continue, ignorîndu-se teorema lui Stoilow, de natură să confere acestui capitol o deosebită unitate și profunzime? De ce oare a trecut neobservată situația cu totul inedită pe care teorema de aproximare a lui Vasilescu o pune în evidență în ceea ce privește tipurile posibile de mulțimi excepționale în analiza matematică? De ce oare singurul tratat de analiză în care se amintește că autorul teoremei privind discontinuitățile de prima specie ale funcțiilor de variabilă reală este Alexandru Froda este tratatul profesorului Miron Nicolescu? De ce au trebuit să treacă aproape patruzeci de ani pentru

ca cultura noastră să-l încorporeze pe Pius Şerban Coculescu şi nici pînă acum nu l-a încorporat pe Matila Ghyka? Iată numai cîteva întrebări dintr-o listă mult mai lungă. Mai sînt apoi atîţia alţii despre care nu am mai putut sau nu am fost încă sau nu vom fi nici de aici înainte în măsură să discutăm în deplină cunoştinţă de cauză (despre unii sperăm să ne ocupăm cu un alt prilej, despre alţii s-au ocupat sau se vor ocupa cu mai multă competenţă acei colegi ai mei care, prin natura preocupărilor lor, au fost mai aproape de opera lor). Vom semnala totuşi aici cîteva alte cazuri de frustrare care comportă o acţiune corespunzătoare de recuperare.

Ne vom referi mai întîi la surprinzătoarea reconsiderare pe care prof. Mircea Maliţa a realizat-o recent, relativ la opera multă vreme subapreciată şi, uneori, chiar negată, a lui Spiru Haret, *Mecanica socială*. Considerăm fericită ideea Editurii Ştiinţifice de a o fi reeditat în 1969, readucînd astfel în atenţie o lucrare de pionierat în domeniul utilizării modelelor matematice în ştiinţele sociale. Într-un articol recent (*Spiru Haret, a Romanian forerunner of mathematical modelling in the social sciences*, în volumul *The revolution in science and technology and contemporary social development*, Ed. Academiei R. S. R., Bucureşti, 1974), prof. Mircea Maliţa reuşeşte să pună într-o lumină cu totul nouă ideile lui Haret din *Mecanica socială*, plasîndu-le în perspectiva teoriei matematice a jocurilor de strategie. Anume, profesorul Maliţa recunoaşte, în abordarea lui Haret, un joc de sumă nenulă între agricultorii care reclamau un preţ ridicat al porumbului şi industriaşii care revendicau un preţ mai scăzut. Este apoi identificată, în metaforele mecanice ale lui Haret, axa de negociere pe care Nash plasează punctul de echilibru şi, implicit, soluţia jocului (Mircea Maliţa trimite aici la lucrarea lui R. Duncan Luce şi Howard Raiffa, *Games and Decisions*, John Wiley, New York, 1964, pp. 124—128).

Un al doilea exemplu la care ne vom referi va fi cel consemnat de profesorul Ciprian Foiaş în legătură cu un rezultat mai vechi al profesorului Miron Nicolescu (*Academicianul Miron Nicolescu*, în „Progresele ştiinţei”, 1974, nr. 1). În cadrul cercetărilor d-sale privind funcţiile calorice (adică soluţii ale ecuaţiei căldurii

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \Delta\right)u = 0),$$

prof. Miron Nicolescu a stabilit, în 1932, o teoremă de tip Liouville şi, în continuare, în 1935—1937, pe baza unei formule originale de reprezentare, a obţinut o puternică teoremă de unicitate pentru problema lui Cauchy la ecuaţia căldurii. Concomitent, teorema fusese obţinută şi de către matematicianul sovietic A. Tihonov. Datorită acestei situaţii, în care un acelaşi rezultat fusese obţinut concomitent, dar independent (Tihonov îşi publicase articolul într-o revistă nu prea cunoscută la momentul respectiv, în timp ce articolul prof. Miron Nicolescu apăruse în „Commentarii Mathematici Helvetici"), teorema primise numele de Nicolescu-Tihonov. Dar ... ulterior anumite reviste şi tratate de specialitate au înlocuit, în mod nedrept, această denumire prin aceea de „teorema lui Tihonov" şi, în felul acesta, lumea matematică a uitat, treptat, de dubla paternitate a acestei teoreme. Avem aici un fel de frustrare inversă: recunoaşterea iniţială este abandonată, substituindu-se o regretabilă omisiune. Între timp, ameliorări substanţiale ale teoremei în discuţie sînt obţinute de matematicieni de seamă ca americanul Einar Hille, polonezul M. Kryżański, sovietica O. Ladyzenskaja şi americanul Avner Friedman. Evoluţia naturală a lucrurilor avea să restituie autorului cu dobîndă paternitatea care-i fusese un timp trecută sub tăcere. În 1965—1966, prof. Miron Nicolescu, într-un ciclu de articole publicate în „Rendiconti dell Accademia Nazionale dei Lincei", avea să stabilească faptul că toate ameliorările obţinute de autorii tocmai menţionaţi pot fi obţinute, în cazul ecuaţiei căldurii, ca nişte consecinţe imediate ale formulei de reprezentare cu ajutorul căreia d-sa demonstrase, în 1935, teorema de unicitate. Mai mult decît atît, această formulă permite chiar o ameliorare a rezultatelor a căror regăsire a permis-o.

S-a petrecut astfel, cu formula de reprezentare a prof. Miron Nicolescu, o evoluţie similară celeia pe care a avut-o teorema lui Stoilow discutată în capitolul care-i este consacrat. Formula a devenit un mijloc de aducere într-o albie comună a unor rezultate diferite, obţinute de matematicieni de seamă ulterior obţinerii ei. Rămîne ca, întocmai modului în care s-a procedat cu teorema lui Stoilow, să se tragă toate consecinţele faptului că formula de reprezentare Nicolescu s-a dovedit matricea comună a unui număr atît de important de rezultate. Cum spune atît de frumos Ciprian Foiaş, „reintegrarea reprezentării Nicolescu a

funcţiilor calorice în circuitul matematicii mondiale obligă matematica românească la un efort susţinut pentru utilizarea ulterioară a acestui fapt matematic adînc, a cărui înţelegere va mai cere timp şi linişte" (loc.cit., p. 52).

Un al treilea exemplu semnificativ ni se pare cel privind teoria matematică a învăţării. În 1935, profesorii Octav Onicescu şi Gheorghe Mihoc publică faimoasa lor lucrare în care construiesc teoria lanţurilor cu legături complete, generalizare importantă a teoriei lanţurilor Markov. Teoria lanţurilor cu legături complete a fost primită de la început cu interes în lumea probabiliştilor. Ţinînd seamă şi de contribuţiile româneşti ulterioare la această teorie (George Ciucu, Marius Iosifescu, Radu Theodorescu etc.), se poate probabil spune că ea constituie cea mai importantă manifestare a şcolii româneşti de teoria probabilităţilor. Dar, ca orice teorie ştiinţifică fecundă, întreaga amploare a impactului pe care această teorie avea să-l exercite nu putea fi bănuită, în 1935, nici măcar de autorii ei. În anul 1955, americanii Robert R. Bush şi F. Mosteller publică, în editura Wiley din Statele Unite, cartea *Stochastic Models for Learning*, în care, ignorînd complet existenţa teoriei Onicescu-Mihoc a lanţurilor cu legături complete, încearcă să regăsească pe cont propriu unele porţiuni ale ei, în care vedeau instrumentul matematic cel mai adecvat pentru construirea unei teorii probabiliste a învăţării. Era aici una din multele manifestări de ignorare în acea vreme, de către oamenii de ştiinţă americani, a unor realizări ale oamenilor de ştiinţă europeni. Ulterior însă, prioritatea românească în acest domeniu avea să fie recunoscută, autorii români fiind constant menţionaţi, unii dintre cei mai importanţi cercetători americani ai teoriei matematice a învăţării (Maurice Kennedy, T. E. Harris, F. Mosteller şi alţii) recunoscînd că teoria lanţurilor cu legături complete a profesorilor Onicescu şi Mihoc constituie cel mai bun model probabilistic pentru studiul proceselor de învăţare. Un rol de seamă în consolidarea şi lansarea teoriei proceselor cu legături complete ca bază a teoriei matematice a învăţării l-au îndeplinit probabiliştii români din generaţia tînără, în special Marius Iosifescu, care a extins utilizarea sistemelor cu legături complete de la studiul proceselor de învăţare controlate de către subiecţi (fără intervenţia profesorului sau experimentatorului) la studiul unor procese de învăţare cu profesori sau experimentatori activi.

Scanned with CamScanner

Sistemele cu legături complete ale lui Iosifescu sînt mai generale decît lanţurile cu legături complete.

Rămînînd tot în domeniul teoriei probabilităţilor, vom da un al patrulea exemplu de frustrare: Deşi prima teorie probabilistă a automatelor finite a fost elaborată la Bucureşti, în 1963 (de către Octav Onicescu şi Silviu Guiaşu), datorită unei întîrzieri în publicarea lucrării ea nu a primit recunoaşterea de prioritate pe care o merita.

Un caz mai puţin obişnuit de frustrare, caz identificat abia în ultima vreme şi pe care-l semnalăm aici pentru prima dată, îl priveşte pe prof. Gabriel Sudan, autorul unor lucrări profunde de teoria mulţimilor şi de teoria numerelor, lucrări, din păcate, prea puţin cunoscute de tînăra generaţie de matematicieni. Identificarea acestui caz a făcut obiectul unei urmăriri care aminteşte de situaţiile pline de neprevăzut din unele romane poliţiste. O vom relata aici în toate detaliile.

Cu puţin timp înainte de a muri, prof. Gr. C. Moisil ne-a atras atenţia, într-un mod cu totul întîmplător, că primul exemplu de funcţie recursivă care nu este primitiv recursivă a fost dat de către prof. Gabriel Sudan. Împrejurarea în care am primit această veste nu ne-a permis să cerem explicaţii şi aşteptam cu înfrigurare un moment prielnic în care să-l putem aborda pe prof. Moisil în legătură cu acest subiect. Între timp însă au survenit plecarea d-sale în Canada şi evenimentul tragic care a făcut imposibilă reluarea acestei discuţii. Am relatat aceste lucruri cîtorva colegi mai tineri, cu care colaborăm, printre care cercetătorului Ionel Ţevy de la Institutul de matematică şi studentului Cristian Calude de la Facultatea de matematică a Universităţii din Bucureşti. Dificultatea consta în primul rînd în identificarea articolului în care se afla exemplul cu pricina. Într-adevăr, în urma verificării listei de lucrări ale prof. Sudan (o astfel de listă se află în lucrarea lui George Şt. Andonie, *Istoria matematicii în România*, vol. III, Editura Ştiinţifică, Bucureşti, 1967, pp. 170—171) s-a constatat că nici una dintre lucrările sale ştiinţifice nu-şi propune obţinerea unui exemplu de tipul celui menţionat de către Gr. C. Moisil. Situaţia se complica însă datorită posibilităţii ca terminologia şi notaţiile folosite de către profesorul Sudan să fi fost atît de diferite de cele utilizate astăzi, încît să facă de nerecunoscut exemplul în chestiune. Într-adevăr, primul articol al prof. Sudan

apare în 1924, în timp ce noţiunea de funcţie recursivă şi terminologia corespunzătoare apar abia în deceniul al patrulea. Mai era posibil ca un atare exemplu să figureze implicit, în cadrul unor consideraţii relative la o cu totul altă problemă. După cum vom vedea, au fost şi una şi alta ...

După o examinare atentă a tuturor articolelor şi cărţilor prof. Sudan, Cristian Calude îşi opreşte atenţia asupra articolului *Sur le nombre transfini* ω^ω, publicat în „Bulletin mathématique de la Société Roumaine des Sciences", vol. 30, 1927, fasc. 1, pp. 11—30. Alegerea acestui articol nu era justificată de faptul că s-ar fi identificat în el exemplul căutat. Se ajunsese la el prin eliminare, deoarece despre celelalte se putea afirma cu certitudine că nu conţin exemplul căutat. Mai pleda pentru acest articol şi faptul că era menţionat la bibliografie în cartea clasică a lui Rosza Péter asupra funcţiilor recursive. Dar entuziasmul provocat de acest din urmă fapt fusese repede risipit. Într-adevăr, în cartea Roszei Péter nu există nici o trimitere, în text, la articolul lui Sudan, dar prezenţa acestui articol la bibliografie putea fi explicată prin faptul că unul din capitolele cărţii se referă la recurenţa transfinită, adică exact la tema în care se încadra articolul prof. Sudan.

Am relatat aceste lucruri şi lui Ionel Ţevy, propunîndu-i să examineze cu atenţie întregul text al acestui articol. Ionel Ţevy are la un moment dat impresia de a fi identificat (la p. 13 a articolului!) un exemplu cu proprietăţile dorite; în fapt, funcţia în cauză era parţial recursivă, după cum avea să arate ulterior Cristian Calude, care, ambiţionat de acest eşec, porneşte din nou în căutarea exemplului dorit. Atunci cînd aproape orice speranţă era pierdută, spre sfîrşitul articolului (la p. 29), Calude reuşeşte să găsească exemplul mult căutat, argumentul în această privinţă fiind stabilit prin efortul comun al lui Ionel Ţevy şi Cristian Calude.

Evident, autorul articolului *Sur le nombre transfini* ω^ω utilizează acest exemplu în cu totul alte scopuri decît cel pe care-l avem noi în vedere acum. Articolul apare în ianuarie-iunie 1927, deci este scris cel mai tîrziu în 1926, în timp ce noţiunile de funcţie recursivă şi funcţie primitiv recursivă urmau să fie degajate abia cu cîţiva ani mai tîrziu. În articol se aminteşte mai întîi noţiunea de „tip de variabilă" introdusă de Hilbert. Tipul T_1 de variabilă

parcurge elementele dintr-o anumită clasă de numere ordinale. O funcţie al cărei argument şi a cărei valoare constituie variabile de tipul T_1 este, prin definiţie, o variabilă de tipul T_2. Se pot defini, în continuare, variabile de tipul $T_3, \ldots, T_n, \ldots, T_\omega, T_{\omega+1}, \ldots, T_{\omega^2}, \ldots, T_{\omega^\omega}, \ldots$ Rezultatul major obţinut de G. Sudan afirmă că, în timp ce pentru definirea unui număr ordinal oarecare, dar mai mic decît ω^ω, este suficient tipul de variabilă T_1 (deci recurenţa ordinară), numărul ω^ω nu poate fi atins decît cu o variabilă de tipul T_2 (care comportă recurenţa transfinită). Recurenţa ordinară este aceea care corespunde unei variabile fundamentale (adică de tipul T_1) care parcurge numerele ordinale de prima clasă. În cadrul recurenţei ordinare se lucrează cu o funcţie $f(n)$ a cărei valoare este cunoscută pentru $n = 0$ şi a cărei valoare $f(n + 1)$ se deduce din valoarea $f(n)$. Într-o recurenţă transfinită, valoarea funcţiei în n depinde de valoarea ei în predecesorul lui n, în raport cu ordinea de tipul ω^k ($k \in N$).

Vom mai aminti, urmîndu-l pe Calude, cîteva consideraţii din articolul prof. Sudan, care ne vor permite să prezentăm exemplul în discuţie.

α) Mulţimea numerelor ordinale de a doua clasă nu este numărabilă

β) (D. Hilbert). Fie $M = \{f(1), f(2), \ldots, f(n), \ldots\}$ o mulţime de numere ordinale de a doua clasă. Există un număr ordinal $\lambda_n f(n)$ cu proprietăţile: 1. $\lambda_n f(n)$ este mai mare decît orice $f(n)$ din M; 2. Orice număr ordinal care îndeplineşte condiţia 1 este mai mare sau egal cu $\lambda_n f(n)$.

Particularizînd pe f, obţinem: $\lambda_n n = \omega$, $\lambda_n(\omega + n) = \omega \cdot 2$, $\lambda_n \omega^n = \omega^\omega$, deci tabloul

$$\begin{array}{l}
1, 2, 3, \ldots \\
\omega, \omega + 1, \omega + 2, \ldots \\
\omega \cdot 2, \omega \cdot 2 + 1, \omega \cdot 2 + 2, \ldots \\
\omega \cdot 3, \omega \cdot 3 + 1, \omega \cdot 3 + 2, \ldots \\
\vdots \\
\omega^2 \ \ldots \\
\vdots \\
\omega^3 \ \ldots \\
\vdots \\
\omega^\omega \ \ldots \\
\vdots
\end{array}$$

Hilbert a stabilit şi o corespondenţă între elementele tabloului de mai sus şi funcţiile de variabilă naturală, cu valori naturale (*Sur l'infini*, „Acta Mathematica", vol. 48; citat după G. Sudan).

γ) Sistemele ordonate de k numere naturale pot fi ordonate după ordinea ω^k. Iată, de exemplu, cum pot fi dispuse perechile ordonate (a, b) după ordinea ω^2. Vom spune că a precede pe b după ordinea ω^2 dacă şi numai dacă $a = 2^{m_1}(2n_1 + 1) - 1$, $b = 2^{m_2}(2n_2 + 1) - 1$ şi $m_1 < m_2$ sau $m_1 = m_2$ şi $n_1 < n_2$.

δ) Orice ordine de tipul ω^2 poate fi adusă la o recurenţă ordinară dublă şi reciproc (Rosza Péter, *Recursive functions*, Akadémiai Kiadó, Budapest, 1967).

ε) Se spune că două numere naturale a şi b sînt ordonate după ordinea de tipul ω^ω dacă $a = 2^{m_1}(2n_1 + 1) - 1$, $b = 2^{m_2}(2n_2 + 1) - 1$, unde $m_1 < m_2$ sau $m_1 = m_2$ şi n_1 precede pe n_2 pentru k oricît de mare, după ordinea ω^k. Vom spune, în acest caz, că a precede pe b în raport cu ordinea ω^ω.

φ) Iată acum exemplul de funcţie recursivă care poate fi găsit la p. 29 din articolul prof. Sudan:

$$\begin{aligned} &\psi(a, b, 0) = a + b, \\ &\psi(a, b, n + 1) = t_c(a, \lambda_m \psi(c, m, n), b), \end{aligned} \qquad (*)$$

unde

$$\begin{aligned} &t_c(a, f(c), 0) = a, \\ &t_c(a, f(c), n + 1) = f(t_c(a, f(c), n)), \end{aligned} \qquad (**)$$

b este un număr natural, a este un număr ordinal transfinit, $f(c)$ este o variabilă de tipul T_1 iar λ este operatorul lui Hilbert definit la punctul β.

Printr-o analiză atentă a acestui exemplu, Ionel Ţevy şi Cristian Calude au reuşit să arate, pe cale directă, că funcţia ψ nu este primitiv recursivă. Ţinînd seamă că în orice caz ψ este (general) recursivă, ψ îndeplineşte condiţiile anunţate.

*

După cum se poate vedea, articolul în discuţie conţine mult mai mult decît exemplul identificat mai sus; din argumentarea autorului rezultă că funcţiile primitiv recursive sînt exact acele funcţii recursive care corespund unui tip de ordine inferior lui ω^ω, în timp ce funcţiile recursive care

nu sînt primitiv recursive sînt exact acele funcţii recursive care corespund tipului de ordine ω^ω.

În cartea sa, Rosza Péter, referindu-se la un exemplu al lui W. Ackermann (*Zur Hilbertschen Aufbau der reellen Zahlen*, „Mathematische Annallen", vol. 99, 1928, pp.118—133), afirmă la p.106 următoarele: „By this definition, Ackermann gave the first example of a function which is not primitive recursive". Evident, este vorba de o exagerare, deoarece în 1928 nici măcar nu era introdusă noţiunea de funcţie primitiv recursivă. După cum se ştie, conceptele de recursivitate, calculabilitate şi toate chestiunile aferente lor au apărut abia în deceniul al patrulea al secolului nostru (Kleene, Gödel, Turing etc.). Ca şi Sudan, Ackermann nu a dat, ci a folosit fără să-şi dea seama o funcţie recursivă care nu este primitiv recursivă. Exemplul lui Ackermann este reprodus, prin intermediul cărţii clasice a lui Rosza Péter, în monografia relativ recentă a lui Samuel Eilenberg şi Calvin C. Elgot (*Recursiveness*, Academic Press, New York-London, 1970, pp.73—81). Dar, după cum se poate vedea, prioritatea în această privinţă aparţine lui Gabriel Sudan, care şi-a publicat exemplul cu cel puţin un an mai devreme şi care, în plus, a stabilit un rezultat care, într-o viziune aposteriori, s-a dovedit deosebit de semnificativ în ceea ce priveşte natura funcţiilor recursive prin care obţinem diferite numere ordinale mai mici sau egale cu ω^ω.

Ulterior stabilirii faptelor consemnate mai sus, Cristian Calude a avut fericita idee de a merge la articolul lui Ackermann, pentru a stabili „pe text" diferenţa de natură dintre exemplul acestuia şi cel al prof. Sudan. Rezultatul acestei confruntări a fost surprinzător: Ca şi exemplul prof. Sudan, cel al lui Ackermann este obţinut prin suprapunerea a două funcţii, una dintre ele, cea notată de prof. Sudan cu t_c, fiind preluată întocmai (doar cu diferenţe de notaţie şi cu o permutare a primelor două argumente) de către Ackermann, în timp ce a doua, Ψ în notaţia prof. Sudan, este modificată uşor de către Ackermann, în sensul că argumentele numere ordinale sînt înlocuite cu argumente naturale [plus schimbarea de notaţie constînd în înlocuirea lui ψ cu φ şi înlocuirea argumentului notat de prof. Sudan cu a printr-un argument — notat $\alpha(a, n)$ — funcţie de a şi de n; această ultimă înlocuire are ca efect doar modificarea valorii funcţiei φ în

punctul $(a, 0, n+1)$]. Aşadar, exemplul lui Ackermann este

$$\varphi(a, b, 0) = a + b,$$
$$\varphi(a, b, n+1) = g_c(\varphi(a, c, n), \alpha(a, n), b),$$

unde

$$g_c(f(c), a, 0) = a,$$
$$g_c(f(c), a, n+1) = f(g_c(f(c), a, n)).$$

Ca şi la prof. Sudan, exemplul este, evident, folosit în alte scopuri decît cel pe care îl avem în vedere aici. Influenţa exercitată de articolul prof. Sudan asupra demersului lui Ackermann este vizibilă — după cum a observat tot Cristian Calude — şi în alte locuri ale articolului său, unde preia de asemenea unele idei ale prof. Sudan; de exemplu, funcţia

$$\psi(a, 0) = \mathfrak{A}(a),$$
$$\psi(a, b+1) = \mathfrak{L}_c(a, b, \psi(c, b))$$

de la p. 129 a articolului lui Ackermann este întocmai (cu o schimbare de notaţie şi o permutare de argumente) funcţia

$$\varphi(a, 0) = \alpha(a),$$
$$\varphi(a, n+1) = \beta_c(a, \varphi(c, n), n)$$

de la p.21 a articolului prof. Sudan.

Articolul lui Ackermann, apărut în 1928, poartă, ca dată de primire la redacţie, 20 ianuarie 1927, adică momentul în care articolul prof. Sudan apărea. Ackermann şi-a elaborat deci articolul înainte de apariţia articolului prof. Sudan. Totuşi, ţinînd seama de relaţiile apropiate dintre Ackermann şi Sudan [să nu uităm că prof. Sudan a petrecut în Germania perioada anilor 1922—1925, cînd, lucrînd în preajma unor mari matematicieni ca David Hilbert (care a fost şi preşedintele comisiei care a prezidat teza sa de doctorat), E. Landau, R. Courant şi Hermann Weil, nu se putea să nu intre în contact şi cu W. Ackermann, cu care avea preocupări comune şi care se afla în anturajul lui Hilbert], este neîndoielnic că Ackermann a cunoscut conţinutul articolului prof. Sudan înainte de apariţia acestuia. O confirmare a acestei ipoteze o constituie următoarea

referință făcută de Ackermann la p.119 a articolului său (reproducem un context mai larg, pentru edificare):

„Wir stellen nun im folgenden eine Funktion auf, von der wir beweisen, dass sie nicht ohne den zweiten order einen höheren Typ definiert werden kann. Mit Hilfe der dabei benutzten Methode wird man auch für andere Gruppen unschwer den Beweis führen können, dass sie den Funktionenbestand erweitern. [Aici se face o trimitere la o notă de subsol, după cum urmează: *Eine Arbeit, die mit der verliegenden manche Berührungspunkte, wird von Herrn G. Sudan publiziert Werden.* Es handelt sich bei ihr um die Definition von Zahlen der zweiten Zahlklasse, die man in ähnlicher Weise klassifizieren kann wie die Definitionen der reellen Zahlen" (sublinierea ne aparține — *S.M*)].

Rezultă clar, din rîndurile de mai sus, că Ackermann se referă la niște rezultate încă nepublicate ale lui Sudan, rezultate pe care probabil le-a cunoscut din discuțiile directe cu acesta din urmă, în perioada în care Sudan lucra la teza de doctorat (susținută în 1925), sau ulterior, din corespondența cu acesta. Nesiguranța lui Ackermann cu privire la locul și data publicării articolului lui Sudan ar putea explica absența unei referințe mai precise. Totuși, dacă aceasta putea fi situația atunci cînd Ackermann și-a elaborat lucrarea, nu se poate pune decît pe seama unei neglijențe sau scăpări faptul că nu a precizat referința în cauză cu prilejul corecturii, deoarece neîndoielnic corectura unui articol depus la redacție în ianuarie 1927 și publicat în 1928 nu putea avea loc decît într-un moment în care articolul prof. Sudan era de mult apărut. Chiar dacă revista românească în care Sudan își publicase articolul a ajuns cu întîrziere în Germania, Ackermann, fiind din timp avertizat, putea obține informația bibliografică de rigoare.

Fapt este că această lacună din referința pe care Ackermann o face la Sudan l-a frustrat pe acesta din urmă de o prioritate pe care toate piesele aflate la dosar o atestă fără cel mai mic echivoc; *paternitatea profesorului Sudan asupra primului exemplu de funcție recursivă care nu este primitiv recursivă este în afara oricărei îndoieli.* Lacuna inițială din citarea lui Sudan de către Ackermann se agravează la Rosza Péter prin omisiunea numelui lui Sudan, căruia i se substituie cel al lui Ackermann (parcă simțindu-și păcatul, Rosza Péter îl trece totuși pe Sudan la bibliografia de la

sfîrşitul cărţii ei) şi apoi omisiunea se propagă mai departe, în cărţile actuale de logică matematică, dintre care cea a lui Eilenberg şi Elgot n-a fost decît un exemplu.

Acest procedeu de inserare la bibliografia finală a unei lucrări la care — în mod nedrept — nu se trimite în text a fost aplicat şi de către R. Bittner în monografia sa *Algebraic and analytic properties of solutions of abstract differential equations* („Rozprawy Matematyczne", vol. 41, 1964, 64p.) articolului prof. Miron Nicolescu *Problème de l'analyticité par rapport à un opérateur linéaire*, „Studia Mathematica", vol.16, 1958, pp.353—363), în ciuda faptului că în o serie de articole anterioare relative la probleme similare (*Operational calculus in linear spaces*, „Studia Mathematica, vol.20, 1961, pp.1—18; *On a new definition of polynomials*, „Bull. Acad. Polon. Sci.", Cl. III, vol.9, 1961, pp.79—84 etc.) acelaşi articol al prof. Nicolescu este utilizat în mod substanţial, recunoscîndu-se rolul său în edificarea unui calcul operaţional abstract (deci fără utilizarea transformării Laplace) în spaţii liniare.

Un cititor grăbit ar putea compara „isprava" prof. Sudan cu aceea a lui Lebesgue, care devenise, la începutul secolului nostru, autorul involuntar al primului exemplu de mulţime analitică neboreliană. Asemănarea este totuşi şubredă. Lebesgue, nu numai că nu avea intuiţia semnificaţiei exemplului său, ci dimpotrivă el considera că mulţimea în cauză este boreliană. Dimpotrivă, Sudan, nu numai că a demonstrat o intuiţie profundă a situaţiei care avea să fie cristalizată cu cîţiva ani mai tîrziu, dar a pus în evidenţă nişte fapte nedepăşite nici astăzi, privind legătura dintre funcţiile calculabile şi ordinalele de diferite clase.

Vom încheia, observînd faptul remarcabil că, la aproape 50 de ani de la publicarea exemplului lui Sudan, nici o simplificare nu a intervenit în structura exemplelor de funcţii recursive care nu sînt primitiv recursive. Profesorul Gabriel Sudan, autor al primului exemplu de funcţie recursivă care nu este primitiv recursivă, a mers la ţintă pe o cale care nu a mai putut fi scurtată şi are puţine şanse să fie în viitorul apropiat.

d) Studiul întreprins asupra celor patru personalităţi considerate în a doua parte a cărţii atrage atenţia asupra vocaţiei interdisciplinare a gîndirii ştiinţifice româneşti, pe linia inaugurată de Spiru Haret prin *Mecanica socială*. Haret, Barbilian, Servien, Ghyka, Moisil au manifestat,

Scanned with CamScanner

fiecare în felul său, tendința de a proiecta gîndirea matematică în cea umanistă. Mai sînt însă multe cercetări de întreprins pentru a preciza adevărata amploare și semnificație a contribuției lor în acest domeniu. În aceeași ordine de idei vom avea de luat în considerare cîteva personalități importante, în viață, dintre care vom menționa aici pe profesorul Octav Onicescu, pe N. Georgescu-Roegen și pe Ștefan Lupașcu. Itinerariul „energiei informaționale" a lui Onicescu cuprinde azi aproape toate teritoriile disciplinelor social-umaniste, iar ideea de entropie, atît de importantă în opera prof. Onicescu, revine în concepțiile economice ale lui Georgescu-Roegen și în filozofia atît de originală a lui Lupașcu. (Opera acestuia din urmă, deja discutată la noi, cu deosebit succes, de către Constantin Noica și Victor Săhleanu, numără cîteva lucrări puternic impregnate de spiritul științelor exacte; menționăm *La tragédie de l'énergie* (Casterman), *Science et Art abstrait* (Juillard), *Le principe d'antagonisme et la logique de l'énergie* (Hermann) și mai cu seamă ultima sa carte, din 1974, *L'énergie et la matière psychique. Ses logiques normales et pathologiques* (Juillard).) Ideea prof. Miron Nicolescu privind dicționarul axiomatic a stîrnit interesul unui mare număr de lingviști, care au reluat-o și discutat-o în contextul lexicologiei contemporane.

Vom încheia această *Introducere* cu o încercare de a sintetiza, din unghiul de vedere care ne-a fost accesibil, opera și personalitatea celui căruia îi dedicăm această carte, nu doar pentru a ne fi îndrumat, în urmă cu un sfert de veac, primii pași în cercetare, ci în primul rînd pentru că, prin influența pe care a exercitat-o asupra noastră, ne-a ajutat în mare măsură să ne cristalizăm o viziune culturală asupra matematicii.

Rămîne însă ca o cercetare ulterioară să reia mai sistematic și mai detaliat itinerariile acestei opere.

«Pînă la proba contrarie, pentru mine orice om este bun și îi acord încredere» (Miron Nicolescu)

Opera matematică a prof. M. Nicolescu este impresionantă prin unitatea, profunzimea și eleganța ei. Interesat în primul rînd în problemele de structură a unor clase de funcții care apar în mod natural în analiză, în special în studiul anumitor tipuri de ecuații cu derivate parțiale, prof. M. Nicolescu a creat și a dus la perfecțiune teoria

funcţiilor poliarmonice, de care şi-a legat numele în mod organic şi căreia i-a dat aceeaşi sudură impecabilă pe care o are teoria clasică a funcţiilor armonice ; (Monografia d-sale *Les fonctions polyharmoniques* publicată la Paris în 1938, într-o colecţie celebră, a devenit de mult şi, ceea ce este mai important, continuă să rămînă o carte fundamentală, de referinţă permanentă) ; a pus bazele teoriei funcţiilor policalorice, desăvîrşind-o prin rezultate de o neasemuită eleganţă. Mari matematicieni ai secolului nostru, ca J. Hadamard, P. Montel, M. Picone, au dat o înaltă apreciere acestor contribuţii, care dealtfel au devenit clasice la scurt timp după apariţia lor ; ele sînt curente astăzi în matematică — şi chiar în mecanică — în însăşi terminologia introdusă de către prof. M. Nicolescu.

Ca o continuare firească, prof. M. Nicolescu a studiat trei tipuri de analiticitate : eliptică, hiperbolică şi parabolică, cărora le-a dat o sinteză strălucită, folosind aparatul analizei funcţionale. S-a cristalizat astfel studiul analiticităţii în raport cu un operator oarecare.

Numeroasele lucrări ştiinţifice publicate în cei cincizeci de ani de activitate matematică sînt, direct sau indirect, subordonate unui scop unic. Ca un arhitect care şi-a fixat de la început, cu luciditate şi clarviziune, linia principală a edificiului pe care-l va ridica, prof. M. Nicolescu a urmat, de-a lungul anilor, cu consecvenţă şi cu migală, firul ideilor sale de început, cînd îşi propusese să construiască o teorie a analiticităţii pentru spaţii cu mai multe dimensiuni. Lărgind mereu perspectiva şi modul de punere a problemei, în funcţie de noile etape de dezvoltare a matematicii, prof. M. Nicolescu a dus la desăvîrşire un edificiu matematic care îmbină armonios liniile clasice cu cele moderne.

*

Nu vom face aici o analiză amănunţită a operei matematice a prof. M. Nicolescu, analiză pe care am între-prins-o deja, în colaborare cu N. Dinculeanu şi C. Foiaş, în „Gazeta matematică", seria A, 1963, pp. 538—555* .

---

* Pentru bibliografia lucrărilor prof. Miron Nicolescu, a se vedea atît bibliografia publicată ca anexă la articolul din „Gazeta matematică", 1963, cît şi bibliografia publicată în volumul *Institutul de matematică al Academiei R. S. R (Bucureşti şi Iaşi), 20 de ani de activitate (1949—1969)*, Ed. Academiei R. S. R., Bucureşti, 1970.

Scanned with CamScanner

Vom încerca doar să desprindem cîteva aspecte care, laolaltă, conferă o fizionomie deosebit de caracteristică operei matematice a prof. M. Nicolescu.

Un prim aspect semnificativ îl constituie *consecvenţa cu care prof. M. Nicolescu a urmărit problemele care l-au preocupat şi legătura organică dintre aceste probleme.* Vom alege, pentru ilustrare, ciclul de 15 articole relativ la analiza polidimensională, ciclu care a determinat la noi în ţară o întreagă şcoală, al cărei rod ar merita să fie consemnat într-o monografie. După cum se ştie, acest ciclu este inaugurat în 1938, printr-un articol care-şi propune doar să înlocuiască, în trei teoreme ale lui Bögel, ipoteza derivabilităţii polidimensionale prin aceea a continuităţii polidimensionale. Au mai urmat cîteva contribuţii care erau, fiecare, ca nişte izvoare de munte despre care nu se putea încă şti atunci, în anii anteriori războiului, că se vor uni treptat în rîuri şi apoi în marele fluviu pe care l-a constituit amplul memoriu din 1952, *Contribuţii la o analiză de tip hiperbolic a planului*. Acest fluviu a crescut la rîndul său, unindu-se cu alte fluvii, cum ar fi acela al poliarmonicităţii şi al parabolicităţii.

Putem spune că evoluţia ideilor a urmat, la prof. M. Nicolescu, o traiectorie arborescentă, de la periferia arborescenţei către trunchiul ei. Aşa cum, într-o arborescenţă, de la fiecare nod periferic nu se poate ajunge decît într-un singur loc — la centrul ei — şi aceasta într-un singur mod, tot aşa putem spune că fiecare dintre articolele de început ale prof. M. Nicolescu conţine, în germene întreaga evoluţie ulterioară, de la fiecare dintre ele se ajunge în mod natural la sinteza operată în anii din urmă.

Un al doilea aspect semnificativ este *modul în care contribuţiile prof. M. Nicolescu stau de fiecare dată sub semnul unor analogii profunde.* În 1940, căuta — şi găsea — pentru continuitatea şi derivata polidimensională, pentru continuitatea în medie circulară şi laplacienii generalizaţi, analogul proprietăţii de conservare prin convergenţă uniformă a continuităţii clasice şi a faptului de a fi o derivată. În 1950 se întreba asupra analogului, în analiza polidimensională, al teoremei lui Weierstrass de aproximare a funcţiilor continue prin polinoame şi obţinea, ca răspuns, acel rezultat de alură clasică privind aproximarea uniformă a funcţiilor hiperbolic continue prin polinoame hiperbolice. Apoi, stabilea analogul global al unor rezultate celebre

privind raportul dintre diferențiabilitate și existența derivatelor parțiale, dezvoltarea lui Taylor, criteriul de analiticitate al lui Bernstein, integrarea prin părți etc. Din aceste analogii între probleme și rezultate izolate s-au cristalizat treptat analogii mult mai cuprinzătoare, între întregi teorii și domenii ale analizei: între analiza clasică și analiza globală, între analiticitatea hiperbolică și cea armonică sau parabolică. S-a ajuns astfel la adevărate analogii între analogii, deoarece fiecare dintre cele trei teorii ale analiticității — hiperbolică, armonică și parabolică — avea la bază o analogie cu analiticitatea clasică. Recunoaștem aici modul în care Banach definea profesia de matematician: A fi matematician, observa Banach, înseamnă a fi capabil de analogii între noțiuni, între probleme, între rezultate, între teorii și între analogii.

Pentru prof. Miron Nicolescu, matematica se construiește în etaje care repetă, la diferite niveluri de abstracție, aceeași arhitectură. Analogiile pe care le frecventează sau le dezvoltă merg totdeauna la esența lucrurilor, au o legitimare profundă și, în ciuda (sau tocmai datorită) pregnanței lor, sînt de cele mai multe ori legate de deosebite dificultăți tehnice de demonstrație.

Ajungem astfel la un al treilea aspect semnificativ al operei prof. M. Nicolescu, acela al *tendințelor unificatoare*. Cele trei teorii ale analiticității s-au unit în teoria mai cuprinzătoare a analiticității în raport cu un operator diferențial liniar. Fiind dat un operator diferențial liniar L, să se caute în ce condiții se poate dezvolta o funcție u, indefinit diferențiabilă, în serie de puteri ale unei anumite soluții v a ecuației $Lv = 1$, coeficienții fiind soluții ale ecuației $Lv = 0$.

Această tendință unificatoare se observă și în unele contribuții de mai mică amploare, dar cu larg și îndepărtat ecou. În 1933, prof. M. Nicolescu s-a întrebat asupra posibilității de a se unifica metodologic teoria integralei Riemann cu aceea a integralei Lebesgue și și-a pus problema unei definiții de tip Lebesgue pentru integrala Riemann, după ce, cu vreo opt ani mai devreme, olandezul J. Ridder eșuase într-o întreprindere similară. A reușit în această tentativă (concomitent cu O. Frink, jr., dar independent de el), realizînd astfel un deziderat simetric cu cel la care Denjoy ajunsese cu doi ani mai devreme, cînd obținea o construcție riemanniană a integralei Lebesgue.

Aceste analogii și tendințe de unificare sînt corelate, în opera prof. M. Nicolescu, cu ceea ce am considera un al patrulea aspect semnificativ, anume *ideea de prelungire.* „Atenția cercetătorilor a fost deseori îndreptată" — observă prof. M. Nicolescu în introducerea la un memoriu din 1951 — „asupra problemei de a defini operatori diferențiali iterați printr-o singură operație de trecere la limită. Ce se întîmplă în aceste condiții? Sau clasa funcțiilor cărora li se aplică operația directă D^* este identică cu clasa funcțiilor cărora li se aplică operația iterată D; sau prima dintre aceste clase este mai largă decît a doua. În al doilea caz, clasa funcțiilor la care se aplică operatorul D^* *prelungește* cealaltă clasă". Toți cei care au avut privilegiul de a audia prelegerile prof. M. Nicolescu știu cît de mult îi place să accentueze verbul *prelungește.*

Mereu alți operatori diferențiali iterați aveau să joace rolul acestui operator D și mereu alții aveau să joace rolul lui D^*, care mereu se afla în a doua variantă a alternativei de mai sus. Caracterizarea funcțiilor armonice prin proprietatea de invarianță prin mediațiune circulară, aplicarea aceluiași principiu la laplacianul iterat de un ordin oarecare (și care avea să conducă la studiul funcțiilor poliarmonice), derivata bidimensională, ca modalitate de studiere directă a derivatelor parțiale mixte de ordinul al doilea, diferențiala totală directă de ordinul al doilea, studiul de mai tîrziu al operatorilor eliptico-parabolici, se subsumează, toate, acestei idei simple, dar profunde, a prelungirii razei de acțiune a unui obiect matematic, prin reprezentarea sa cu ajutorul altui obiect matematic.

Această adevărată obsesie a prelungirii este legată de o altă frumoasă obsesie, în care vedem un al cincilea aspect semnificativ al operei prof. M. Nicolescu: *grija de a trage consecințele propriilor d-sale rezultate.*

Într-un important memoriu din 1952, se observa că Charles de la Vallé Poussin nu a știut să tragă consecințele observațiilor sale penetrante, privind posibilitatea pe care derivatele de mulțime superficială o au de a corespunde unor derivate parțiale de ordinul al doilea ale funcțiilor de punct. Aceste consecințe a știut să le desprindă prof. M. Nicolescu, după cum tot d-sa a știut să desprindă consecințele necesare din propriile d-sale rezultate, ajungînd astfel să cristalizeze o operă de o desăvîrșită coeziune și unitate.

Modul natural în care rezultatele prof. Miron Nicolescu purced unul dintr-altul are însă şi o altă explicaţie, în care vedem un al şaselea aspect semnificativ şi care constă în *motivarea, de fiecare dată cu anticipare, a construcţiei pe care urmează s-o efectueze*. În aproape fiecare memoriu, primele pagini indică arhitectura întregii construcţii, etapele principale ale demersului pe care-l va întreprinde. Un adevărat model al genului îl constituie, în această privinţă, introducerea la memoriul din 1952, privind analiza hiperbolică:

„Ideea care stă la baza teoriei funcţiilor de mai multe variabile este individualizarea fiecărei variabile independente. Atunci cînd scriu $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ înţeleg că f este funcţie de x_1 şi de x_2 etc., iar fiecare din aceste variabile apare ca atare în enunţuri şi formule. Noţiunea fundamentală, corespunzătoare derivatei pentru funcţiile de o singură variabilă, este noţiunea de diferenţială totală. Or, aceasta este o formă *liniară* de diferenţialele variabilelor independente. Analiza bazată pe o astfel de concepţie poate fi numită, din această cauză, o *analiză liniară* a planului sau a spaţiului cu $n > 2$ dimensiuni etc.".

În urma unei astfel de introduceri, ideea considerării unei funcţii de mai multe variabile ca o funcţie de ansamblul acestora se prezintă cititorului în modul cel mai natural. Autorului nu-i rămîne decît de a schiţa istoricul încercărilor de elaborare a unei astfel de analize globale, începînd cu Lebesgue şi continuînd cu Bögel şi alţii. Se cristalizează astfel stadiul cercetărilor în acest domeniu, natura problemelor rezolvate şi întrebările care-şi aşteaptă răspunsul. În acest moment, totul este pregătit pentru ca autorul să schiţeze planul lucrării, într-un mod care să confere o deplină motivare problemelor abordate şi o semnificaţie clară rezultatelor obţinute:

„Unul dintre rezultatele fundamentale ale lucrării îl constituie o dezvoltare a unei funcţii cu anumite proprietăţi diferenţiale, dezvoltare în acelaşi timp analoagă dezvoltării lui Taylor şi dezvoltării lui Almansi. Această dezvoltare permite să fie bogată în consecinţe. Unele dintre aceste consecinţe sînt expuse în lucrarea de faţă, dar subiectul este departe de a fi epuizat". Apoi se expune conţinutul fiecărui paragraf, anticipîndu-se principalele noţiuni şi rezultate.

După lectura acestor consideraţii introductive, cititorul este pe deplin avertizat asupra liniilor mari ale drumului

Scanned with CamScanner

care urmează să fie parcurs, este convins de necesitatea de a parcurge acest drum, de modul natural în care acest drum s-a desprins din drumurile anterioare și așteaptă cu nerăbdare să contemple detaliile acestei călătorii, care se anunță de la început captivantă. Prof. Miron Nicolescu nu cultivă, în matematică, genul criptic, în care o definiție sau o teoremă își amînă mereu scadența pe mai tîrziu — sau pentru niciodată — încît cititorul se hrănește mereu din speranța că dezvoltarea ulterioară îi va aduce satisfacția pe care textul deja parcurs nu i-a putut-o oferi. Fiecare definiție este introdusă exact atunci cînd este nevoie de ea. Dar aceasta nu înseamnă că în opera d-sale nu avem și satisfacția unor interesante considerații cu caracter aposteriori.

Una din ideile care revin repetat în această operă este aceea a *distincției dintre aspectele locale, individuale și cele globale de ansamblu, ideea legăturii dintre aceste aspecte*. Vedem în această idee un al șaptelea aspect semnificativ. Astfel, în 1938 pornind de la o noțiune simplă, aceea de mulțime liniară de funcții și de închidere a unei astfel de mulțimi, obține o sinteză surprinzătoare a unor rezultate clasice ale lui Lebesgue și Baire și observă că, în timp ce conceptul de mulțime liniară conduce la aspecte pur globale, conceptul mai special de mulțime liniară completă (obținut prin adăugarea aditivității ca proprietate de mulțime) dă posibilitatea obținerii unor rezultate cu caracter local. În 1950, într-un articol de o mare profunzime asupra proprietăților aditive de mulțime, se discută, în cadrul aceleiași distincții dintre local și global, diferite tipuri de convergență pentru șiruri de funcții analitice, armonice, poliarmonice și se ajunge la dezvăluirea faptului că rezultate matematice aparent disparate ca teorema lui Montel pentru șirurile uniform convergente de funcții armonice și teorema lui Hartogs privind olomorfia unei funcții analitice sînt manifestări ale unui singur fenomen.

Revine mereu, în opera prof. M. Nicolescu, problema determinării unei comportări globale printr-o proprietate locală. Este suficient ca o serie de funcții convexe nenegative să conveargă într-un singur punct pentru ca să conveargă uniform pe tot intervalul de definiție, demonstra în 1938. Global, funcțiile armonice se comportă ca și funcțiile armonice ordinare. Dar, individual, ele sînt foarte diferite, observă altă dată.

Una din caracteristicile construcțiilor matematice interesante constă în faptul că instrumentele secundare, ajutătoare, de care ele se folosesc prezintă de multe ori un interes de sine stătător. Această situație o întîlnim și în opera prof. M. Nicolescu și o considerăm al optulea aspect semnificativ al ei. Astfel, în 1940, într-o lucrare dedicată modului în care convergența uniformă păstrează unele proprietăți care apar în analiza bidimensională, este nevoie la un anumit moment de o extensiune a următoarei teoreme a lui Orrin Frink, jr.: Dacă f_n este un șir uniform (într-un sens pe care nu-l putem explica aici) în orice punct dintr-un domeniu mărginit și dacă f_n este convergent în orice punct din acest domeniu, atunci șirul f_n este uniform convergent. Prof. Miron Nicolescu arată că este suficient ca șirul f_n să fie convergent într-un singur punct pentru ca să rezulte convergența uniformă în tot domeniul. (Din nou, legătura organică între local și global.)

În 1952, tot ca un rezultat auxiliar (în memoriul dedicat derivabilității polidimensionale) se restabilește, într-o formă mai generală, o formulă de integrare prin părți pentru integrala dublă.

În 1946, ca un rezultat auxiliar de care era nevoie în stabilirea, în condiții foarte generale, a formulei a doua de medie pentru integrala dublă, se demonstrează o frumoasă teoremă privind funcțiile superficial monotone în sensul invariabilității de semn a diferenței bidimensionale. Punctele în care o astfel de funcție este discontinuă Cauchy formează o mulțime numărabilă. În plus, se arată că punctele de discontinuitate Cauchy ale unei funcții total monotone coincid cu punctele ei de discontinuitate în sens bidimensional. (Amintim că o funcție $f(x, y)$ este total monotonă în intervalul bidimensional J dacă pentru orice $h > 0$, $k > 0$ astfel încît $(x, y) \in J$, $(x + h, y + k) \in J$, expresiile $f(x + h, y) - f(x, y)$, $f(x, y + k) - f(x, y)$, $f(x + h, y + k) - f(x + h, y) - f(x, y + k) + f(x, y)$ păstrează, toate, un același semn în J.) Paralelismul cu funcțiile de o singură variabilă este deci perfect. Și aici, analogiile și extensiunile sînt de substanță, ele comportă o metodologie inedită față de cazul clasic.

*

Scanned with CamScanner

Am lăsat la sfîrşit un aspect de o semnificaţie deosebită. *Modestia etică* (nu ştiinţifică !) îl face pe prof. M. Nicolescu să atribuie altora anumite iniţiative şi să-şi asume doar rolul celui ce completează aceste iniţiative. În lucrările d-sale privind analiza polidimensională, mereu i se atribuie lui Karl Bögel iniţiativa de amploare a acestei analize. Să ne fie îngăduit să observăm că Bögel a construit analiza polidimensională ca un scop în sine, ca o construcţie care-şi este suficientă sieşi, în timp ce prof. M. Nicolescu a reuşit să dea acestei analize o legitimare mult mai amplă, prin joncţiunea pe care o stabileşte cu operatorii diferenţiali fundamentali din teoria ecuaţiilor cu derivate parţiale.

*

Activitatea de profesor a acad. M. Nicolescu s-a caracterizat de la început printr-o ţinută ştiinţifică şi pedagogică exemplară, care se păstrează vie în memoria celor ce i-am fost studenţi. Cursurile sale au constituit o cotitură în predarea analizei matematice la Universitatea din Bucureşti. Lecţiile sale constituiau pentru noi o adevărată descoperire ; descopeream adevărata analiză matematică, cu perspective nebănuite şi exercitînd o atracţie copleşitoare asupra spiritului ; descopeream că o oră de curs nu trebuie să fie o copie a cursului litografiat sau tipărit, ci un mijloc specific de comunicare între profesor şi studenţi, în care se dezvăluie partea vie, am putea spune umană, a ştiinţei ; mai descopeream cum, pe nesimţite, o oră de predare a matematicii devine şi o oră de educaţie a gîndirii şi a inimii.

Dacă şcoala românească de analiză matematică este astăzi atît de puternică şi înfloritoare, acest fapt îşi are una din cauzele sale în nivelul înalt — ştiinţific şi pedagogic — al acestei discipline la Universitatea din Bucureşti şi acest nivel înalt este nemijlocit legat de personalitatea prof. M. Nicolescu. La orele sale ni se oferea nu o matematică gata făcută, ci o invitaţie de a pătrunde în laboratorul ei de creaţie, o participare pasionantă la naşterea noţiunilor şi teoremelor matematice.

*

Manualele de analiză publicate de către prof. M. Nicolescu şi, în special, tratatul în trei volume, publicat în jurul anilor 1960, ilustrează într-un mod fericit personali-

Scanned with CamScanner

tatea d-sale de om de știință și pedagog. Aproape toți tinerii matematicieni din țara noastră, independent de specializarea lor ulterioară, sînt tributari cursurilor și manualelor d-sale, audiate sau studiate. Prin viziunea personală care stă la baza sa, prin echilibrul care se stabilește între aspectele de analiză clasică și cele de analiză funcțională, tratatul de analiză al prof. M. Nicolescu este unul dintre puținele în lume. Acest tratat îl conduce pe cititor pînă la stadiul actual al problemelor expuse, constituind astfel un mijloc puternic de inițiere în munca de cercetare în domeniul analizei matematice. În același timp, acest tratat expune unele contribuții de seamă ale școlii românești de analiză, contribuții pe care le așează la locul lor firesc, în cadrul celorlalte rezultate din domeniul respectiv de cercetare. Aceste contribuții românești sînt — de multe ori — rezultatul sugestiilor date chiar de către prof. M. Nicolescu și opera sa.

*

Sînt 27 de ani de cînd prof. Miron Nicolescu a preluat conducerea catedrei de analiză matematică (numită la început catedra de Calcul diferențial și integral) a Universității din București. Școala de analiză matematică pe care a format-o în acest timp este una din componentele cele mai valoroase ale matematicii românești. Profesori ca acad. Miron Nicolescu nu numai că ne-au învățat matematică, dar ne-au învățat cum să învățăm matematica; și nu numai cum s-o învățăm, dar și (în măsura în care aceasta se poate învăța) cum s-o facem, cum s-o dezvoltăm. Prin activitatea desfășurată în ultimele trei decenii și, în special, prin contactul direct, natural și omenesc, de fiecare zi, cu tinerii matematicieni, prof. Miron Nicolescu este unul din marii șefi de școală ai științei românești. Cu o înțelegere deplină a funcției sociale a matematicii, cu o dragoste de părinte pentru tinerele talente matematice, care au găsit în cadrul Institutului de matematică al Academiei un mediu optim de formare, prof. Miron Nicolescu a adus o contribuție esențială la consolidarea legăturilor dintre cercetarea fundamentală și cea aplicativă, dintre Universitate și Academie, dintre matematicienii români și cei din alte țări.

*

Să-mi fie îngăduit să aduc aici o mărturie personală. Sînt 30 de ani de cînd am urmărit, în amfiteatrul Spiru Haret al Universității din București, lecția de deschidere a cursului de analiză matematică a prof. Miron Nicolescu. Au fost suficiente doar cîteva prelegeri ale d-sale, pentru a-mi da seama ce bucurii spirituale mă așteptau dacă aveam curajul să rămîn mai departe student în matematici, specialitate care, în acel moment, nu oferea încă perspectiva unei profesiuni clare. Ca și mine, mulți alți colegi, din diferite generații, poartă amprenta cursurilor predate de către prof. Miron Nicolescu. Voi evoca aici, pentru ilustrare, un episod recent, deosebit de semnificativ.

Într-o seară din luna mai a anului 1973, Casa oamenilor de știință a Academiei a găzduit o întîlnire neobișnuită. O întreagă promoție de matematicieni se întîlneau cu profesorul lor de analiză matematică, pentru a marca 20 de ani de la absolvirea acestui curs. Nu erau absolvenții unei serii oarecare, cu procentajele obișnuite de studenți foarte buni, buni și mediocri; erau absolvenții unei „serii de aur", care, sfidînd legile statistice, au devenit, aproape în totalitate, personalități de vază ale vieții noastre matematice. Nici cursul pe care-l sărbătoreau nu era un curs oarecare, ci unul care-și pusese pecetea pe întreaga lor evoluție ulterioară: cursul prof. Miron Nicolescu.

Ca fost conducător de seminar la acest curs, am avut privilegiul de a fi de față la întîlnire. Cordialitatea ei, maturitatea punctelor de vedere exprimate dădeau întreaga măsură a raporturilor adînc umane, de înaltă intelectualitate și de larg spirit cetățenesc pe care prof. Miron Nicolescu le întreține cu cei din jur.

*

Acad. Miron Nicolescu iese mereu în arena socială, spunîndu-și cuvîntul în probleme dintre cele mai complexe privind educația tineretului, organizarea științei și învățămîntului, evocînd figurile unor mari matematicieni români, ca acelea ale lui Pompeiu și Stoilow, dezbătînd probleme filozofice ale matematicii, adresîndu-se tineretului școlar sau studențesc în legătură cu probleme ca alegerea profesiunii și frumusețea profesiunii de matematician, evocîndu-și anii de școală și profesorii în anuarul liceului la care a învățat, pledînd convingător și cu pasiune pentru moderni-

zarea predării matematicii, atît în învățămîntul superior, cît și în cel mediu, spunîndu-și cuvîntul în probleme legate de cultivarea limbii române, popularizînd cu măiestrie unele fapte matematice importante, precum și unele domenii recente, legate de apariția mașinilor de calcul și a ciberneticii, împărtășindu-și impresiile din unele călătorii peste hotare, reacționînd prompt la evenimentele politice interne și internaționale.

I-am urmărit, în ultimii ani, în coloanele revistelor „Argeș" și „Tribuna școlii", adevărate miniaturi morale izvorîte dintr-o grijă deosebită față de ființele fragile. O pedagogie a atitudinilor delicate, o nevoie imperioasă de a proteja existențele tinere. O viziune simplă, dar robustă, rezultînd dintr-o rectitudine morală și intelectuală.

*

Echilibrat și constant în relațiile umane; cu o aură de blîndețe și cu un calm generator de bună dispoziție, care dau oricărui interlocutor curajul de a i se destăinui; radiind bunătatea, căldura, generozitatea și seninătatea pe care numai oamenii cu conștiința împăcată a rectitudinii lor în viață le pot avea; ferm ori de cîte ori este necesar; lipsit de discontinuitățile și capriciile care înnourează contactele între oameni, prof. Miron Nicolescu găsește o adevărată satisfacție în posibilitatea de a-și ajuta colaboratorii, totdeauna cu o deosebită discreție. „Pînă la proba contrarie, pentru mine orice om este bun și îi acord încredere", mi-a spus cîndva. Niciodată nu impune, dar totdeauna se impune. Întreaga alcătuire umană a prof. Miron Nicolescu amintește de o replică pe care Shakespeare o pune în gura unui personaj al său: „Adevărul are o inimă liniștită" (*Truth has a quiet breast*).

„De la toți am învățat" — spune undeva prof. Miron Nicolescu. „Mă surprind uneori vorbind olimpian ca Pompeiu, apăsat ca Țițeica, senin și simplu ca David Emmanuel. Căci noi nu sîntem numai fiii părinților noștri, ci și fiii profesorilor noștri". Să ne fie îngăduit să-l parafrazăm și să mărturisim aici că am învățat de la d-sa și profesiunea de matematician și pe aceea mai nobilă de om și că ne surprindem mereu urmăriți de ambiția de a merge pe căile nobile pe care ni le arată.

Scanned with CamScanner

STADIILE DE DEZVOLTARE A TEORIEI FUNCȚIILOR REALE ÎN ROMÂNIA

După cum se știe, teoria funcțiilor reale s-a născut la sfîrșitul secolului trecut, ca o consecință directă a dezvoltării teoriei mulțimilor și a rafinării problemelor și rezultatelor în cîteva compartimente ale analizei matematice, cum ar fi teoria integrării și teoria seriilor trigonometrice. Dezvoltarea acestei teorii la noi în țară urmează pas cu pas dezvoltarea ei pe plan mondial și își găsește explicația atît în condițiile generale de dezvoltare a matematicii românești, cît și în situația teoriei funcțiilor reale în țările europene cu care noi am avut legături științifice mai strînse. Vom distinge în dezvoltarea acestui domeniu în țara noastră cinci perioade, care corespund dealtfel și dezvoltării ei pe plan mondial.

O primă perioadă se referă la primele două decenii ale secolului nostru. Este perioada în care se pun bazele acestei teorii, în special în Franța (prin Borel, Lebesgue, Baire și Denjoy), în Italia, în Anglia, în Germania, în Polonia (prin Sierpiński și primii săi elevi) și în Rusia (prin Egorov și Luzin). Această perioadă își găsește la noi în țară un singur reprezentant, dar de prima mărime: Dimitrie Pompeiu. Importanța și fecunditatea ideilor sale pot fi măsurate abia acum, cînd ecoul lor, departe de a se stinge, cîștigă în amploare. În cartea lui Thomas Hawkins, *Lebesgue's Theory of Integration. Its Origins and Development* (Teoria integralei Lebesque. Originea și dezvoltarea ei), publicată în 1970 de către editura americană The University of Wisconsin Press (Madison, Milwaukee), Dimitrie Pompeiu este citat sub titlul semnificativ *Pioneering Applications of the Lebesgue integral* (Aplicații de pionierat ale integralei Lebesgue), recunoscîndu-i-se astfel meritul de a fi unul dintre primii matematicieni care a utilizat integrala Lebesgue ca instrument de cercetare. Pompeiu este citat în numeroase monografii, ca aceea a lui E. F. Col-

Scanned with CamScanner

lingwood și A. J. Lohwater *The theory of cluster sets* (Cambridge at the University Press, 1966), iar studiul funcțiilor lui Pompeiu a cunoscut în ultimele decenii o deosebită intensitate, Gustave Choquet utilizîndu-le, de o manieră implicită, în teza sa, pentru a arăta că orice funcție de prima clasă Baire, cu proprietatea lui Darboux, este transformata topologică a unei funcții derivate. Ceea ce este remarcabil în opera lui Pompeiu este faptul că, într-o perioadă în care teoria funcțiilor reale abia se năștea, a întrevăzut probleme al căror interes avea să persiste pînă azi și care aveau să-și găsească o tehnică corespunzătoare de rezolvare abia cu cîteva zeci de ani mai tîrziu.

O a doua perioadă de dezvoltare a teoriei funcțiilor reale cuprinde cel de-al treilea deceniu al secolului nostru și se referă la rezultatele lui Simion Stoilow și cele ale lui Florin Vasilescu. Este perioada în care, după cristalizarea conceptelor de bază, legate de punctul de vedere descriptiv al unor Baire și Sierpiński și punctul de vedere metric al lui Borel și Lebesgue, teoria funcțiilor reale se afla în procesul de elaborare a teoremelor ei fundamentale. Într-un astfel de moment, Simion Stoilow aduce un punct de vedere nou în acest domeniu. După cum se știe, una din ideile mari și fecunde introduse în teoria funcțiilor reale a fost aceea a mulțimilor excepționale din punctul de vedere al măsurii (Lebesgue) sau al categoriei (Baire). Este de observat însă că, în toate rezultatele obținute de Lebesgue, Baire și Denjoy, mulțimea excepțională este situată în spațiul de definiție a aplicațiilor considerate. Stoilow obține, pentru prima oară în acest domeniu, teoreme de mare anvergură în care mulțimea excepțională, de măsură nulă, este situată nu în spațiul de definiție, ci în spațiul valorilor funcției. Stoilow a arătat că dintr-o teoremă a sa se poate deduce teorema clasică a lui Denjoy asupra numerelor derivate ale unei funcții continue. O seamă de rezultate ulterioare teoremei lui Stoilow, rezultate astăzi clasice, datorite unor matematicieni de seamă ca Banach și Saks, sînt consecințe ale teoremelor lui Stoilow, însă din păcate acest lucru a fost observat abia în 1958. Dacă faptele acestea ar fi fost semnalate la timp și dacă s-ar fi întrevăzut fecunditatea problemelor și ideilor lui Pompeiu, matematica românească ar fi căpătat un loc de frunte în istoria dezvoltării teoriei funcțiilor reale, un loc comparabil cu

cel ocupat de Polonia sau de Rusia. Ne întărim această opinie prin faptul că şi celălalt reprezentant român din deceniul al treilea în teoria funcţiilor reale, Florin Vasilescu, a reuşit să atragă atenţia lumii prin cîteva idei originale relative la teoria funcţiilor multiforme, legate de preocupările sale de teoria potenţialului. Lebesgue şi Luzin, cunoscuţi prin zgîrcenia cu care citează alţi autori, menţionează numele lui Florin Vasilescu în monografii de multă vreme clasice. Avem în vedere monografia lui Lebesgue, *Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives*, şi pe aceea a lui Luzin, *Leçons sur les ensembles analytiques et projectifs*.

O a treia perioadă de dezvoltare se referă la deceniile al patrulea şi al cincilea ale secolului nostru şi cuprinde în special cercetările profesorilor Nicolae Ciorănescu, Alexandru Froda, Gabriel Sudan, Miron Nicolescu, Tiberiu Popoviciu. Este perioada în care se cristalizează un specific al dezvoltării româneşti în acest domeniu şi în care se dezvoltă unele preocupări care aveau să facă şcoală în matematica românească. Avem în vedere în primul rînd proecupările de analiză hiperbolică ale prof. Miron Nicolescu şi cele de teoria funcţiilor convexe ale profesorului Tiberiu Popoviciu. Deceniul al patrulea cunoaşte, sub influenţa relaţiilor noastre din ce în ce mai strînse cu matematicieni francezi şi cu cei polonezi, unele preocupări interesante de teoria mulţimilor, în special teoria cardinalelor şi ordinalelor transfinite, în lucrările profesorilor Gabriel Sudan şi Alexandru Froda. În ordinea de idei dezvoltate de Denjoy, Young, Blumberg şi Luzin, prof. Alex. Froda realizează o privire sistematică asupra distribuţiei proprietăţilor locale ale unei funcţii reale şi obţine, între altele, rezultatul, astăzi clasic, care afirmă că mulţimea punctelor de discontinuitate de prima specie ale unei funcţii reale arbitrare de o variabilă reală este cel mult numărabilă; ceea ce se ştia pînă atunci era doar faptul că, dacă o funcţie nu are puncte de discontinuitate de a doua specie, atunci cele de prima specie formează o mulţime numărabilă.

Profesorul Miron Nicolescu a dezvoltat, de-a lungul a cîtorva zeci de ani, o concepţie de o perfectă rotunjime şi unitate, privind trei tipuri de analiticitate a funcţiilor reale: hiperbolică, parabolică şi eliptică, concepţie sintetizată mai tîrziu în noţiunea generală de analiticitate în

raport cu un operator diferențial liniar. În ordinea de idei a analiticității hiperbolice se situează și unele cercetări ale lui Nicolae Ciorănescu. Deceniul al patrulea cunoaște, în lume, o perfecționare a tehnicilor de lucru în teoria funcțiilor reale, trecerea de la elaborarea unor concepții la construirea tehnică și perfecționarea instrumentelor de investigație. Încă în 1932, prof. Miron Nicolescu face racordul între teoria clasică a integralei Riemann și conceptele topologice și relative la teoria măsurii, la ordinea de zi în acel moment. Se știe că lungimea, aria, volumul, în sensul matematicii elementare, nu sînt măsuri, în sensul teoriei moderne a măsurii. Era deci necesar să se precizeze statutul integralei clasice ca integrală în raport cu o măsură. Teoria măsurii a făcut obiectul a numeroase cercetări în matematica românească, mai cu seamă sub forma ei abstractă.

O altă direcție de cercetare este inițiată, în această perioadă la Cluj-Napoca, de către prof. Tiberiu Popoviciu, prin elaborarea teoriei convexității de ordin superior. Această concepție a fost expusă de către autorul ei într-o monografie astăzi clasică, *Les fonctions convexes*, apărută în 1944 la Paris, în colecția Actualités scientifiques et industrielles.

Perioada a patra de dezvoltare a teoriei funcțiilor reale în țara noastră, perioadă care se extinde de-a lungul deceniilor al șaselea și al șaptelea ale secolului nostru, este perioada în care, sub influența prosperității generale a școlii matematice românești, stimulate de noile condiții de dezvoltare a patriei noastre, un număr mare de matematicieni români participă la faza de acuratețe pe care teoria funcțiilor reale a trăit-o și o trăiește încă pe plan mondial. Este perioada în care direcțiile și conceptele de bază ale acestei teorii sînt deja elaborate, dar rămîn numeroase probleme de finisare a unor detalii, de înlăturare a unor lacune, perioada în care această teorie își cere ultimele linii de pensulă, pentru a o transforma într-o teorie nu numai utilă, dar și frumoasă. Un număr mare de matematicieni români participă la acest proces, unii sporadic: Al. Climescu la Iași, I. Barbălat, C. Foiaș, N. Boboc și alții la București. Dealtfel, încă înainte de război se observă această participare sporadică, dar interesantă, a unor matematicieni ca profesorii O. Onicescu și Gh. Mihoc. Dar apar și numeroase preocupări sistematice. Menționăm în primul rînd deosebit de bogata preocupare pentru analiza

hiperbolică, preocupare născută la noi din cercetările prof. Miron Nicolescu. Rezultatele în această privință sînt obținute de prof. Eugen Dobrescu și colaboratorii săi (Ion Sălăgean, Gh. Mosca, Aurora Sălăgean), de profesorii L. J. Nicolescu, Dragoș Vaida și Solomon Marcus. O altă direcție bogat reprezentată este aceea inițiată la Cluj-Napoca de prof. T. Popoviciu în domeniul convexității, al interpolării, al teoremelor de medie și al celei mai bune aproximări, direcție reprezentată de profesorii Elena Moldovan, Oleg Aramă, Dumitru Ripianu, Ivan Singer, Dimitrie D. Stancu și alții. Această perioadă este caracterizată prin generalizarea metodelor topologice și ansambliste în teoria funcțiilor reale și prin reluarea, la nivelul matematicii moderne, a unor preocupări ale clasicilor matematicii românești. Avem în vedere reconsiderarea, cu larg ecou în lume, a rezultatelor lui Dimitrie Pompeiu de către Solomon Marcus, a rezultatelor lui Stoilow de către Solomon Marcus și Marius Iosifescu, a rezultatelor lui Florin Vasilescu de către Ionel Țevy și Cristian Bruteanu, a rezultatelor prof. Miron Nicolescu de către profesorii N. Dinculeanu, C. Foiaș, S. Marcus, I. Singer și alții. Preocupări de mai mică amploare, relative la serii trigonometrice, fac obiectul cercetărilor prof. Marcel Roșculeț (la București) și prof. Marcel Rădulescu (la Cluj-Napoca). Pe linia de preocupări a matematicii poloneze, Solomon Marcus dezvoltă studiul unor clase de funcții discontinue și al proprietăților patologice din punctul de vedere al măsurii sau al categoriei.

Importante contribuții relative la teoremele de medie au fost obținute de prof. Miron Nicolescu și de Nicolae Ciorănescu, pe linia unei tradiții care urcă la Dimitrie Pompeiu. Recent, unele contribuții relative la teoremele de medie au fost obținute de prof. Olga Costinescu (la Iași). O deosebită însemnătate o prezintă, în această perioadă, tratatele, manualele și monografiile de teoria funcțiilor reale și teoria măsurii, care apar în țara noastră și care au imprimat un progres esențial învățămîntului și formării de cercetători în domeniul analizei matematice. Menționăm în primul rînd tratatul de analiză matematică, în trei volume, al prof. Miron Nicolescu, tratat aproape unic în lume prin modul în care îmbină spiritul teoriei clasice a funcțiilor reale cu cel al analizei funcționale și topologiei generale. Menționăm de asemenea monografiile privind teoria măsurii ale prof. N. Dinculeanu și cea privind funcțiile aproape

Scanned with CamScanner

periodice, a prof. C. Corduneanu, traduse peste hotare în limba engleză.

A cincea perioadă de dezvoltare a teoriei funcţiilor reale este perioada pe care această disciplină o trăieşte în momentul de faţă în lume. Caracteristic ei este faptul că accentul nu mai cade pe problemele care vin din interiorul acestei teorii, construcţie esenţialmente terminată, ci din alte domenii ale matematicii, cum ar fi analiza numerică, analiza funcţională, ecuaţii diferenţiale, teoria distribuţiilor, cercetarea operaţională, fizica matematică. Încă Denjoy prevăzuse că concepţia discontinuă a materiei, care stă la baza fizicii moderne, cere înlocuirea derivatei ordinare prin derivata aproximativă şi, în general, a proprietăţilor care au loc peste tot prin cele care au loc în afara unei mulţimi excepţionale.

Dintre cercetările din această a cincea etapă, aş dori să menţionez aici un exemplu care mi se pare simptomatic pentru semnificaţiile nebănuite ale teoriei funcţiilor reale. Bernard Bereanu, în preocupările sale de cercetare operaţională, a utilizat numeroase rezultate din teoria funcţiilor convexe Jensen şi a pus probleme noi, interesante, de teoria funcţiilor reale. Explicaţia intervenţiei teoriei funcţiilor convexe în problemele de programare se explică prin aceea că convexitatea discretă nu poate fi bine înţeleasă fără prelungirea, scufundarea ei în fenomenul de convexitate definit pe o mulţime continuă.

Dezvoltarea teoriei funcţiilor reale în ultimele două decenii şi, în particular, dezvoltarea ei la noi în ţară, îşi aşteaptă încă monografiile care s-o sistematizeze şi s-o sintetizeze.

Scanned with CamScanner

DIMITRIE POMPEIU

Timp de mai multe decenii, Dimitrie Pompeiu a dominat viaţa matematică românească. Eram student cînd l-am cunoscut, în ultimii ani ai vieţii sale. Mi-aduc aminte de o zi prin 1946 sau 1947, cînd cu prilejul vizitei, la Universitatea din Bucureşti, a unor distinşi matematicieni francezi, a rostit cîteva cuvinte, la o solemnitate organizată în amfiteatrul Spiru Haret. Doar cîteva cuvinte, dar a fost de ajuns pentru a sesiza fibra de artist a acestui savant. Discursul său era ca un cîntec, trădînd un simţ acut al proprietăţii termenilor şi o vocaţie a vorbirii frumoase. Există astăzi mai multe mărturii despre afinitatea sa pentru poezie. Voi relata doar una dintre acestea.

În cartea *Bacovia. Viaţa poetului*, publicată în Editura pentru literatură în 1962 şi avînd ca autor pe Agatha Grigorescu-Bacovia, este evocată o întîlnire a lui Dimitrie Pompeiu cu marele poet moldovean, în februarie 1930, cu prilejul unei şezători literare care a avut loc în sala Teatrului Mic din Bucureşti. Bacovia a citit *Lacustră, Pantofii* şi alte poezii. În sală se afla şi Dimitrie Pompeiu care, la sfîrşit, a pătruns în culise, felicitîndu-l foarte călduros pe poet. Iată dialogul care a avut loc (loc. cit., p.221):

„— Ştiţi cu cine am studiat poeziile dumneavoastră? îl întrebă Pompeiu. Cu Bogdan-Duică de la Cluj; un an întreg a studiat opera dumneavoastră cu studenţii şi aşa m-am edificat şi eu asupra frumoasei dumneavoastră creaţii. Poetul îl privi cu acel zîmbet rar, de sărbătoare, cînd era mulţumit de ceva.

— Dumneavoastră sînteţi profesor de matematică? — îl întrebă la rîndul său poetul.

— Da, dar matematica iubeşte şi înţelege poezia ...

— Poezia nu prea iubeşte matematica şi nu prea o înţelege, glumi Bacovia. Vă mulţumesc pentru atenţie".

Scanned with CamScanner

L-am mai văzut pe Pompeiu în jurul anilor 1950, condus la braţ, pe culoarul Facultăţii de matematică şi fizică, de către prof. Miron Nicolescu. Cu fruntea grea de gînduri, părăsit de puteri, avea nevoie de un sprijin pentru a se putea deplasa. Această imagine are azi pentru mine o valoare simbolică. Erau atunci, alături, după cum aveam să-mi dau seama mai tîrziu, doi mari maeştri ai mei, care m-au călăuzit în etapele esenţiale ale formării mele ştiinţifice, Pompeiu prin intermediul operei sale matematice, iar prof. Miron Nicolescu atît prin operă, cît şi direct, de-a lungul multor ani de cînd am privilegiul de a-i fi colaborator. Dar nu este vorba numai de atît. Era atîta gingăşie şi dragoste în modul în care Pompeiu era protejat de către elevul său, încît pentru mine această imagine semnifica o adevărată transmitere de ştafetă din partea unei generaţii către generaţia următoare, aceasta din urma trăind cu intensitate imensa recunoştinţă pe care i-o datorează.

L-am văzut apoi, pentru ultima oară, în aula Academiei, în toamna lui 1953, cînd împlinea 80 de ani. Era dărîmat. Abia a mai putut rosti, cu glasul tremurat şi sugrumat de emoţie, cîteva cuvinte. Privindu-i azi atîtea fotografii care îl arată înalt, frumos şi plin de putere, ascultînd relatările colaboratorilor săi, despre farmecul şi volubilitatea persoanei sale, îmi amintesc cu un fior de acel trup chircit care în 1953 se zbătea să supravieţuiască. A supravieţuit opera sa, a cărei perenitate — o putem spune azi cu mai multe argumente decît în urmă cu 20 de ani, cînd a murit — este asigurată.

*

Valoarea unei opere ştiinţifice se judecă după influenţa pe care ea o exercită asupra evoluţiei ştiinţei. Desigur că pot să apară, în acest proces, unele discontinuităţi. Un rezultat important poate să rămînă un timp neobservat sau neutilizat, după cum o operă modestă poate să apară pentru moment importantă. Mai există în ştiinţă şi drumuri care se înfundă, rîuri care în loc să se verse în fluvii şi, prin acestea, în mări şi oceane, eşuează într-un mic lac sau pur şi simplu într-o băltoacă.

În aceste condiţii, este greu uneori de diagnosticat importanţa unui rezultat matematic chiar atunci cînd el

apare sau în perioada imediat următoare. Multe elemente afective, de conjunctură, pot să-i diminueze sau să-i îngroaşe în mod artificial semnificaţia. Dar atunci cînd de la apariţia lui au trecut multe zeci de ani, atunci cînd relaţiile personale pe care un savant le-a întreţinut cu ceilalţi savanţi nu-şi mai pot face efectul, iar amiciţiile şi adversităţile s-au stins deopotrivă, o judecată din ce în ce mai dreaptă îşi face loc.

Ne propunem să urmărim, tocmai din perspectiva înrîuririi pe care a exercitat-o asupra dezvoltării matematicii, călătoria în timp a unui singur rezultat obţinut de către Pompeiu. Am fi putut alege, în acest scop, noţiunea de distanţă între două mulţimi închise care, după o lungă odisee în domeniul topologiei, consemnată deja în tratate clasice (a se vedea, de exemplu, primul volum, p.106 din tratatul de topologie al lui C. Kuratowski, apărut în 1948) a devenit, încă în urmă cu vreo zece ani, printr-o lucrare a matematicienilor polonezi E. Marczewski şi H. Steinhaus (publicată în „Colloquium Mathematicum"), un instrument de investigaţie în biologie, iar recent un student, C. Calude, i-a găsit o aplicaţie în teoria limbajelor formale. Am fi putut alege micile bijuterii pe care le reprezintă contribuţiile lui Pompeiu relative la teorema creşterilor finite, pe care a extins-o, căreia i-a căutat analogul în domeniul variabilei complexe şi i-a studiat reciproca şi am fi constatat astfel impactul acestor contribuţii asupra teoriei calitative a ecuaţiilor diferenţiale. (Actele celei de-a treia Conferinţe de oscilaţii neliniare, care a avut loc la Berlin în 1964, sînt revelatoare în acest sens.) Ne-am oprit însă atenţia asupra unui alt rezultat, alegerea fiind justificată de considerente personale. Este vorba de o teoremă care, prin frămîntările pe care mi le-a provocat, în mai multe momente ale activităţii mele în domeniul analizei matematice, prin imensa curiozitate pe care mi-a stîrnit-o, a intrat, aş putea spune, în propria mea biografie. Avem în vedere construcţia unor funcţii derivabile, a căror derivată admite o mulţime frontieră peste tot densă de zerouri.

În unele prezentări ale operei lui Pompeiu, această contribuţie este considerată doar în treacăt, ca un rezultat periferic faţă de obiectivele majore ale acestei opere. Poate că, în intenţia lui Pompeiu, aşa s-au şi petrecut lucrurile. Dar optica noastră actuală este datoare să înregistreze judecata unei istorii de aproape 70 de ani, deoarece o mare

Scanned with CamScanner

parte din noțiunile și rezultatele datorite lui Pompeiu datează încă din primul deceniu al secolului nostru. După cum va rezulta, sperăm, din cele ce urmează, această istorie situează construcția menționată printre contribuțiile de prim rang ale operei lui Pompeiu.

*

Să pornim deci la drum.

În teza sa, în momentul în care își propune să arate că o funcție analitică uniformă, avînd drept mulțime a singularităților o mulțime P liniară, perfectă și rară, de măsură nenulă, poate fi mărginită în vecinătatea singularităților sale, Pompeiu observă că pentru construirea unei astfel de funcții are nevoie de o anumită funcție de o variabilă reală definită pe intervalul (α, β), unde α și β sînt extremitățile mulțimii P. „Se știe — spune Pompeiu, că există funcții derivate mărginite care se anulează în orice interval: le voi numi funcțiile lui Köpcke, pentru că Köpcke este cel care, primul, a construit astfel de funcții". Să adăugăm observația că funcțiile lui Köpcke schimbă semnul în orice interval.

Să-l urmărim mai departe pe Pompeiu (vezi D. Pompeiu, *Opera matematică*, Ed. Academiei, 1959, pp.44 — 45): „Consider o funcție a lui Köpcke cu următoarele proprietăți: 1°. Este nulă în toate punctele α_n, β_n extremități ale intervalelor contigue cu P și în orice interval contiguu cu P; 2°. Este nulă în extremitățile α, β al lui P. Fie $g(t)$ o astfel de funcție. Să formăm integrala

$$h(z) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\alpha}^{\beta}\frac{g(t)}{t - z}\,dt.$$

Afirm că funcția $h(z)$ este mărginită în tot planul".

A. Köpcke publicase într-adevăr între anii 1887 și 1899 patru memorii în „Mathematische Annalen", în care își propunea să construiască funcții derivabile în orice punct, oscilînd în orice interval. La capătul unui efort concretizat în 57 de pagini, Köpcke obține această construcție, nu înainte de a fi comis unele erori, pe care însă tot el le-a îndepărtat. Concomitent, J. Pereno în 1897 și, ulterior, T. Brodén în 1900, referindu-se la diferite moduri

de condensare a unor singularităţi cu ajutorul seriilor, obţin de asemenea funcţii derivabile, care oscilează în orice interval.

Examinînd construcţia lui Pompeiu, am constatat totuşi că funcţia pe care el o atribuie lui Köpcke şi pe care o desemnează cu $g(t)$ nu oscilează în orice interval, fiind în unele intervale identic nulă. Astfel, la un moment dat (a se vedea D. Pompeiu, *Opera matematică*, p.47), pentru a se studia comportarea lui $h(z)$ în vecinătatea extremităţilor α şi β ale lui P, se consideră două numere $a = \alpha - h$, $b = \beta + h$ $(h > 0)$ şi se convine ca în intervalele $(a, \alpha - h)$ şi $(\beta + h, b)$ funcţia $g(t)$ să fie nulă.

În fapt, Pompeiu s-a folosit de o funcţie derivată mărginită, luînd valori diferite de zero pe o mulţime liniară perfectă, rară, de măsură pozitivă şi anulîndu-se pe o mulţime peste tot densă. Existenţa unei astfel de funcţii nu poate fi pusă la îndoială. Am găsit-o atestată într-un articol clasic al lui Arnaud Denjoy, publicat în 1915 în „Bulletin de la Société mathématique de France". În acest articol, Denjoy arată, loc. cit, pp.237—248, că există o mulţime P perfectă, rară, de măsură pozitivă, pentru care se poate defini o funcţie derivată nulă în orice punct din afara lui P şi luînd, pe P, atît valori negative, cît şi valori pozitive, în vecinătatea oricărui punct din P.

Pompeiu a avut intuiţia unei astfel de derivate şi i-a atribuit-o lui Köpcke. Ulterior, în 1906, într-un articol despre teorema creşterilor finite şi, mai cu seamă, în 1907, într-un articol publicat în „Mathematische Annalen", jenat probabil de caracterul deosebit de greoi al exemplului lui Köpcke, Pompeiu construieşte, printr-o metodă proprie, o clasă de funcţii continue, strict crescătoare, derivabile, cu derivată mărginită, astfel încît zerourile derivatei formează o mulţime densă a cărei complementară este de asemenea densă. Astfel de funcţii sînt obţinute ca inverse ale funcţiilor de forma

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n (x - a_n)^{\frac{1}{3}} \tag{1}$$

unde $A_n > 0$ pentru $n = 1,2,\ldots$, seriile ΣA_n şi $\Sigma\sqrt{A_n}$ sînt convergente, iar mulţimea $\{a_1,\ldots,a_n,\ldots\}$ este peste tot densă în intervalul de definiţie al lui F.

Eleganța și simplitatea construcției lui Pompeiu contrastează cu prolixitatea construcției lui Köpcke. Funcțiile construite de Pompeiu sînt strict crescătoare, fapt care le distinge de toate celelalte exemple de funcții ale căror derivate admit o mulțime frontieră peste tot densă de zerouri. Avem în vedere nu numai exemplele deja menționate, datorite lui Köpcke, Pereno, Brodén și Schoenflies, dar și cele ulterioare, date, pe căi laborioase, de către A. Denjoy în 1915 (pp.211–237 din articolul citat), S. Mazurkiewicz în 1916, 1917 și 1918, Z. Zalcwasser în 1929 și altele. Faptul acesta nu putea să nu atragă atenția. Contrastul dintre monotonia și derivabilitatea funcției construite de Pompeiu, pe de o parte, și natura neobișnuită a mulțimii zerourilor, pe de altă parte, era frapant în acea vreme, în care se cunoșteau încă destul de puține fenomene patologice în teoria funcțiilor reale. Marele tratat de analiză al lui E. W. Hobson, apărut în 1907 la Cambridge, ca și cel al lui J. Pierpont, apărut în 1911 la Londra, tratate care-și devansau epoca prin spiritul lor deosebit de modern pentru acel moment (învățămîntul analizei avea să fie încă multă vreme dominat de tratate de tipul celui datorit lui E. Goursat), consemnează pe cîteva pagini funcțiile în discuție, numindu-le funcțiile lui Pompeiu.

*

După cum am văzut, derivata $g(t)$ de care Pompeiu avea nevoie apare, în teza sa, sub semnul unei integrale Lebesgue. Aceasta se întîmplă într-un moment în care teoria lui Lebesgue abia apăruse. Dealtfel, întreaga teză a lui Pompeiu este impregnată de spiritul nou al ideilor de măsură și integrală Lebesgue, pe care le promova începutul secolului nostru. Era o întreprindere deosebit de delicată, deoarece lipseau încă marile teoreme care aveau, ulterior, să transforme teoria măsurii și integralei Lebesgue într-un instrument comod, suplu. Astfel, la un moment dat, Pompeiu are nevoie să arate că dacă derivata $g(t)$ despre care a fost vorba mai sus este diferită de zero într-un punct, atunci mulțimea punctelor în care ea este diferită de zero este de măsură pozitivă. Cu 11 ani mai tîrziu, acest fapt devenea o consecință a unei teoreme publicate de Denjoy în „Enseignement mathématique" (Dacă f este o derivată finită

a unei funcţii continue, atunci mulţimea $\{x; a < f'(x) < b\}$ este de măsură pozitivă ori de cîte ori este nevidă). În absenţa acestei teoreme, Pompeiu reuşeşte totuşi să discearnă, în textele încă crude ale lui Lebesgue, argumentele necesare pentru a obţine rezultatul de care avea nevoie. Faptul de a fi reuşit să găsească într-o teorie abia apărută, ca aceea a lui Lebesgue, instrumentele necesare unei investigaţii atît de fine ca aceea privind comportarea unei funcţii analitice în vecinătatea singularităţilor sale (să observăm că Pompeiu reuşeşte să arate că nu natura topologică a mulţimii de singularităţi, ci natura ei metrică, mai precis întinderea ei — liniară sau superficială — este aceea care decide această comportare) şi-a primit, la o distanţă în timp de aproape 70 de ani, o replică meritată.

*

Evident, Pompeiu nu a putut suplini printr-un demers propriu toate acele mari teoreme legate de măsura şi integrala Lebesgue, care aveau să vină abia în deceniile următoare. În particular, Pompeiu nu a putut beneficia, în primul deceniu al secolului nostru, de o teoremă ca aceea a lui Luzin, care avea să vină abia în al doilea deceniu şi din care rezulta că mulţimea valorilor luate de o funcţie în punctele în care derivata ei există şi este nulă este totdeauna de măsură nulă. A trebuit de aceea să facă un lung ocol, recurgînd la o teoremă a lui Borel, pentru a stabili convergenţa aproape peste tot a seriei

$$\frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{A_n}{(x-a_n)^{2/3}} \qquad (2)$$

formate cu derivatele termenilor seriei (1). Însă teorema în cauză a lui Borel cere convergenţa seriei formate cu rădăcinile pătrate ale coeficienţilor A_n.

În 1954 am observat că această ipoteză este inutilă şi că întreaga construcţie a derivatelor lui Pompeiu — şi aşa simplă şi elegantă — poate fi şi mai mult simplificată („Studii şi cercetări matematice", 1954). Studiul metric al mulţimii punctelor de convergenţă ale seriei (2) s-a dovedit inutil pentru stabilirea proprietăţilor funcţiei $G(t)$, inversa lui $F(x)$. Dealtfel, convergenţa aproape peste

tot a seriei (2) poate fi stabilită independent de teorema lui Borel (teoremă care afirmă că dacă seria $\Sigma\sqrt{A_n}$ este convergentă, atunci seria

$$\sum \frac{A_n}{|x - a_n|}$$

este convergentă aproape peste tot).

*

Marile rezultate ştiinţifice se caracterizează, între altele, prin faptul că, pe lîngă eficacitatea lor în problema care le-a provocat, ele îşi dezvăluie mereu noi şi noi implicaţii, mult dincolo de ceea ce însuşi autorul lor ar fi putut bănui. Funcţiile lui Pompeiu îşi arătaseră eficienţa în rezolvarea problemei pe care Pompeiu şi-o propusese în teză. „Maurul şi-a făcut datoria şi poate să plece" ar fi putut spune unii. Dar funcţiile lui Pompeiu au rămas în continuare pe scena matematicii, ele abia urmau să-şi dezvăluie noi şi noi semnificaţii, întocmai ca marile opere literare, pe care fiecare nouă generaţie le îmbogăţeşte cu o nouă lectură. Funcţiile lui Pompeiu aveau să înceapă o lungă peregrinare prin cele mai variate domenii ale analizei şi topologiei, peregrinare care nu este încheiată nici astăzi.

*

Topologia generală a găsit în structura graficelor derivatelor lui Pompeiu o sursă sistematică de producere a unor situaţii care contrazic intuiţia comună.

B. Knaster şi C. Kuratowski au arătat încă în 1925 că problema construirii unei mulţimi G biconexă (o mulţime este biconexă dacă este conexă, dar nu se poate descompune în două mulţimi conexe şi disjuncte) este rezolvată dacă se construieşte o funcţie derivată mărginită în [0,1], anulîndu-se în orice interval şi nefiind constantă în nici un interval. Ei au atras atenţia asupra faptului că derivatele lui Pompeiu îndeplinesc toate aceste condiţii. Mai tîrziu, în 1952, astfel de contraexemple din domeniul topologiei generale aveau să fie inventariate în volumul al doilea al tratatului de topologie al lui C. Kuratowski. Aici se arată (pp.95–96) că, folosindu-se graficul unei derivate a lui Pompeiu, se poate da un exemplu de spaţiu

topologic dispersat (cu alte cuvinte, care nu conţine nici o submulţime conexă care nu se reduce la un punct) şi care nu este nicăieri conex (un spaţiu topologic este nicăieri conex dacă fiecărei perechi de puncte *a* şi *b* din spaţiu îi corespunde o mulţime în acelaşi timp închisă şi deschisă, care conţine pe *a*, dar nu conţine pe *b*). Tot Kuratowski a arătat (loc. cit., p. 130) că graficul unei derivate a lui Pompeiu constituie un exemplu de spaţiu complet, separabil, conex şi punctiform (un spaţiu topologic este punctiform dacă nu conţine nici un continuu care nu se reduce la un punct).

*

În toate aceste aplicaţii topologice, referinţa la derivatele lui Pompeiu este datorită simplităţii lor; însă aceleaşi proprietăţi se pot obţine cu ajutorul oricăror derivate ale căror zerouri formează o mulţime densă împreună cu complementara ei. Originalitatea derivatelor lui Pompeiu constă nu numai în simplitatea lor, în caracterul lor elementar, dar şi în faptul că ele păstrează un semn constant. O clasă similară de derivate a fost studiată de către Z. Zahorski în 1937; este vorba de clasa derivatelor finite, admiţînd o mulţime densă de intervale în care sînt identic nule („Comptes rendus de la Société des Sciences et Lettres de Varsovie"). Ele se deosebesc deci de derivatele lui Pompeiu prin faptul că complementara mulţimii de zerouri este rară, în timp ce, la derivatele lui Pompeiu, ea este densă. Această particularitate a derivatelor lui Pompeiu are o semnificaţie interesantă în problema integrabilităţii. Se ştie, încă din 1881, dintr-un exemplu dat de V. Volterra, că există derivate mărginite neintegrabile Riemann (acest exemplu este consemnat în volumul al doilea de analiză matematică al prof. Miron Nicolescu, publicat în 1953 în Ed. Academiei). Însă, în exemplul lui Volterra, orice interval conţine un subinterval în care derivata este integrabilă Riemann. Derivatele lui Pompeiu au proprietatea remarcabilă de a nu fi integrabile Riemann pe nici un interval. Într-adevăr, dacă o astfel de derivată — fie ea $G'(t)$ — ar fi integrabilă Riemann pe $[a,b]$, am avea

$$G(b) - G(a) = \int_a^b G'(t)\mathrm{d}t$$

şi, ţinînd seama de faptul că G este strict crescătoare pe $[a,b]$, rezultă

$$\int_a^b G'(t)\mathrm{d}t > 0.$$

Pe de altă parte, din faptul că $G'(t)$ se anulează în orice interval, avem

$$\underline{\int_a^b} G'(t)\mathrm{d}t = 0$$

unde bara de sub semnul ultimei integrale arată că avem de-a face cu integrala Darboux inferioară. Am ajuns astfel la o contradicţie: deci G' nu este integrabilă Riemann pe $[a,b]$.

Nici proprietatea de neintegrabilitate Riemann nu este specifică derivatelor lui Pompeiu. Ea apare şi la derivatele de tipul lui Köpcke. Însă în timp ce neintegrabilitatea Riemann a derivatelor lui Pompeiu a putut fi stabilită pe o cale elementară, accesibilă începătorilor în ale analizei matematice, demonstrarea neintegrabilităţii Riemann a derivatelor lui Köpcke reclamă un instrument mai fin, accesibil numai celor avansaţi. Acest lucru este important din punct de vedere metodologic şi pedagogic, atîta vreme cît este vorba de un fapt fundamental, pe care trebuie să-l cunoască masa studenţilor începători. În mod surprinzător, cele mai multe manuale de analiză matematică omit problema atît de naturală a raporturilor dintre cele două noţiuni care constituie temelia unui prim curs de analiză: derivata şi integrala. Mai precis, se specifică raportul care există între clasa funcţiilor integrabile şi clasa funcţiilor care admit primitivă, consideraţiile oprindu-se la constatarea că intersecţia celor două clase conţine clasa funcţiilor continue.

Să vedem deci cum se stabileşte neintegrabilitatea Riemann a derivatelor lui Köpcke. Este suficient să se observe că, în baza teoremei lui Denjoy relativă la mulţimile de forma $\{x\,;\, a < f'(x) < b\}$, teoremă pe care am amintit-o mai sus, mulţimea punctelor în care o derivată a lui Köpcke este diferită de zero este de măsură pozitivă. În acelaşi timp, orice punct în care o derivată a lui Köpcke este

diferită de zero este un punct de discontinuitate pentru această derivată, deoarece mulţimea zerourilor este peste tot densă (în baza proprietăţii lui Darboux a oricărei derivate). Rezultă că mulţimea punctelor de discontinuitate ale unei derivate a lui Köpcke este de măsură pozitivă în orice interval, deci o astfel de derivată nu este integrabilă Riemann în nici un interval.

Observăm că a trebuit să folosim măsura Lebesgue şi o teoremă fină a lui Denjoy, absentă din programa de analiză a oricărei universităţi, ca să nu mai punem la socoteală utilizarea teoremei lui Lebesgue de caracterizare a funcţiilor integrabile Riemann. Aceeaşi demonstraţie ar fi fost valabilă şi pentru stabilirea neintegrabilităţii Riemann a derivatelor lui Pompeiu; în acest caz, utilizarea ei nu s-ar fi justificat în nici un fel, atîta vreme cît dispunem de calea mai simplă şi mai elementară indicată mai sus. Aşa cum am arătat într-un articol menţionat mai sus, publicat în 1954 în „Studii şi cercetări matematice", stabilirea faptului că inversa funcţiei (1) este derivabilă, cu derivată mărginită, iar zerourile derivatei formează o mulţime frontieră peste tot densă nu necesită nici o noţiune şi nici un rezultat de teoria măsurii sau a integralei Lebesgue, totul reducîndu-se la un raţionament elementar asupra seriei (1) şi asupra seriei derivate. Totul pledează deci pentru introducerea funcţiilor lui Pompeiu în cursurile de analiză pentru studenţii începători; nu doar pentru a venera memoria lui Pompeiu, ci în primul rînd pentru importanţa semnificaţiei şi pentru avantajul metodologic pe care-l prezintă.

Ca derivate ale unor funcţii crescătoare (deci cu variaţie mărginită), derivatele lui Pompeiu sînt totdeauna integrabile Lebesgue. Ele furnizează deci o întreagă clasă de derivate mărginite, integrabile Lebesgue, dar neintegrabile Riemann pe nici un interval. Un motiv în plus pentru includerea lor în manualele de analiză matematică. Ele oferă un răspuns complet la una dintre cele mai fireşti întrebări care se poate pune în cadrul unui prim curs de analiză: Pentru o funcţie mărginită, este integrabilitatea Riemann o consecinţă a existenţei primitivei şi a integrabilităţii Lebesgue? După cum am văzut, derivatele lui Pompeiu dau un răspuns negativ la această întrebare.

Să observăm că, pentru a stabili integrabilitatea Lebesgue a derivatelor lui Pompeiu, nu ne-am folosit de mărginirea

acestor derivate, ci exclusiv de faptul că primitivele lor sînt cu variație mărginită. Această situație ne sugerează o generalizare a derivatelor lui Pompeiu. De aci înainte, vom folosi pentru derivatele lui Pompeiu denumirea de *derivate Pompeiu mărginite*, iar pentru derivatele care schimbă semnul în orice interval denumirea de *derivate oscilante*. Dacă înlocuim, în definiția derivatelor Pompeiu mărginite, condiția de mărginire prin condiția de finitudine, obținem noțiunea de *derivată Pompeiu finită*. În sfîrșit, putem considera și *derivate Pompeiu finite sau infinite*. Am întreprins în 1963 (într-un articol publicat în „Rendiconti del Circolo matematico di Palermo") un studiu amănunțit al tuturor acestor tipuri de derivate, precum și al unor generalizări ale lor. Este clar că derivatele Pompeiu finite sau infinite sînt integrabile Lebesgue, pentru același motiv pentru care derivatele Pompeiu mărginite sînt integrabile Lebesgue: primitivele lor sînt funcții crescătoare, deci cu variație mărginită. Se pune în mod natural întrebarea dacă și derivatele oscilante sînt totdeauna integrabile Lebesgue. Îi datorăm lui Andrew Bruckner răspunsul negativ la această întrebare. În 1965 (într-un articol publicat în „Revue roumaine de mathématiques pures et appliquées") el a dat un exemplu de derivată finită, a cărei mulțime de zerouri este densă împreună cu complementara ei, și care nu este integrabilă Lebesgue pe intervalul de definiție.

Un alt exemplu de derivată oscilantă finită, neintegrabilă Lebesgue, a fost dat de J. S. Lipiński, concomitent cu A. Bruckner (în „Revue roumaine de mathématiques pures et appliquées"). Evident însă că, în calitatea ei de derivată finită, orice derivată oscilantă finită este integrabilă Perron.

În legătură cu deosebirea de structură între derivatele lui Pompeiu (mărginite, finite, finite sau infinite) și derivatele oscilante, faptul că primitivele derivatelor oscilante nu pot fi monotone în nici un interval poate fi precizat după cum urmează: Există derivate oscilante a căror primitivă este o funcție cu variație mărginită, după cum există derivate oscilante a căror primitivă nu este cu variație mărginită pe nici un interval. Un exemplu de derivată oscilantă a cărei primitivă este o funcție cu variație mărginită se obține prin considerarea unei funcții f aproximativ continue, mărginite pe $[0,1]$ și luînd în

orice subinterval din [0,1] atît valori pozitive, cît şi valori negative. În virtutea unor rezultate ale lui Denjoy din 1915 (loc. cit.), f este o derivată oscilantă pe [0,1], iar primitiva ei este o funcţie cu variaţie mărginită pe [0,1].

Derivatele oscilante, a căror primitivă este o funcţie cu variaţie mărginită, ocupă o poziţie intermediară între clasa derivatelor lui Pompeiu şi clasa derivatelor oscilante a căror primitivă nu este cu variaţie mărginită pe nici un interval. Ele merită să facă obiectul unui studiu sistematic, precizîndu-se asemănările şi deosebirile dintre ele şi derivatele lui Pompeiu.

*

O dată importantă în istoria derivatelor lui Pompeiu este anul 1947. Doi matematicieni, Gustave Choquet (în „Journal de mathématiques pures et appliquées") şi I. Maximov (în „Annali di Scuola normale super. di Pisa"), dau, independent unul de altul şi pe căi diferite, o caracterizare a transformatelor topologice ale derivatelor: sînt funcţiile Darboux, de prima clasă Baire. Aceasta înseamnă că, fiind dată o funcţie f Darboux, de prima clasă Baire pe $[a,b]$, există o funcţie φ continuă şi strict crescătoare pe $[a,b]$ şi o funcţie derivată g definită pe intervalul $[\varphi(a), \varphi(b)]$, astfel încît $f(x) = g(\varphi(x))$ pentru orice $x \in [a, b]$. Acest rezultat mi-a permis, în 1963 (loc. cit.), să obţin o caracterizare a transformatelor topologice ale derivatelor Pompeiu (mărginite, finite, finite sau infinite): sînt funcţiile (mărginite, finite respectiv finite sau infinite) de prima clasă Baire, avînd proprietatea lui Darboux şi admiţînd o mulţime frontieră peste tot densă de zerouri.

Lucrarea lui Choquet, de mari proporţii (constituie chiar teza sa), utilizează în mod esenţial derivatele lui Pompeiu, deşi, în mod nedrept, nu face nici o referinţă explicită la ele. Este important faptul că, pentru a obţine caracterizarea transformatelor topologice ale derivatelor, Choquet are nevoie de proprietatea de monotonie a primitivei; din lunga listă a celor care construiseră funcţii cu derivată neconstantă pe nici un interval, care se anulează în orice interval, Pompeiu era singurul care satisfăcea această exigenţă. Mai mult decît atît; după cum am observat în 1963 (loc. cit.), din teoremele lui Choquet rezultă o

precizare esențială asupra tipului borelian al mulțimii de zerouri ale derivatelor sale. Astfel, unul din rezultatele lui Choquet afirmă că pentru orice mulțime E de tipul G_δ și de măsură nulă există o funcție F strict crescătoare și absolut continuă, avînd în fiecare punct o derivată unică, strict pozitivă, finită sau infinită, astfel încît $E = \{x\, ;\ F'(x) = \infty\}$. Inversa funcției F este o funcție de tipul lui Pompeiu, cu singura deosebire că derivata ei nu este mărginită, ci doar finită. Zerourile derivatei Pompeiu astfel obținute formează o mulțime care constituie tocmai imaginea prin F a mulțimii E, deci o imagine topologică a unei mulțimi G_δ arbitrare, dar de măsură nulă.

În acest fel, studiul derivatelor lui Pompeiu începe să devină o componentă a problemei generale a structurii funcțiilor derivate, problemă dintre cele mai spinoase, nerezolvate complet nici pînă azi.

*

O etapă importantă o constituie, în această privință, apariția în 1950 a memoriului, astăzi clasic, al lui Z. Zahorski (în „Transactions of the American Mathematical Society"). Unul din rezultatele importante conținute în acest memoriu (teorema 8) dă o condiție necesară și suficientă ca o mulțime să fie mulțimea de zerouri ale unei derivate mărginite. Această condiție cere mulțimii să fie complementara unei mulțimi de clasă M_4. O mulțime E este de clasă M_4 dacă există un șir de mulțimi închise $\{F_n\}$ și un șir de numere $\{\eta_n\}$, $0 < \eta_n < 1$, astfel încît

$$E = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$$

și pentru fiecare $x \in F_n$ și fiecare $c > 0$ există un număr $\varepsilon(x,c) > 0$ avînd următoarea proprietate: pentru toate valorile h și h_1 pentru care $hh_1 > 0$, $h/h_1 < c$, $|h + h_1| < \varepsilon(x,c)$ este satisfăcută inegalitatea

$$\frac{\mu(E \cap (x + h,\ x + h + h_1))}{|h_1|} > \eta_n,$$

unde prin μ am notat măsura Lebesgue. Se convine de asemenea că mulțimea vidă este și ea de clasă M_4. După cum observă chiar Zahorski (loc. cit., p.43), condiția de

Scanned with CamScanner

a fi complementara unei mulţimi de clasa M_4 caracterizează şi mulţimea zerourilor unei derivate Pompeiu mărginite, mărginirea derivatelor intervenind aici în mod esenţial. Pentru derivatele Pompeiu finite, problema structurii mulţimii de zerouri este mult mai grea. Ea poate fi acum abordată cu succes, deoarece în 1970 (într-un articol al lui D. Preiss, publicat în „Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae") a fost rezolvată problema caracterizării mulţimii de zerouri ale unei derivate finite, problemă lăsată fără răspuns de către Z. Zahorski. Însă condiţia găsită de către D. Preiss ca fiind necesară şi suficientă pentru ca o mulţime să fie mulţimea de zerouri ale unei derivate finite este atît de complicată, încît nu o putem reproduce aici. Să mai observăm că D. Preiss obţine şi o caracterizare a mulţimii de zerouri ale derivatei — finite sau infinite — ale unei funcţii continue. Acest rezultat permite să se abordeze problema caracterizării mulţimii de zerouri ale unei derivate Pompeiu finite sau infinite. În orice caz, putem afirma, chiar ignorînd rezultatele lui Preiss, că mulţimea de zerouri ale unei derivate Pompeiu finite sau infinite nu este totdeauna de tipul borelian G_δ. Într-adevăr, cu ajutorul unui rezultat din 1956 al lui V. M. Tzodyks şi E. M. Landis (publicat în „Doklady Akademii Nauk S.S.S.R.") am demonstrat în 1963 (loc. cit., pp.5—6) existenţa unei derivate Pompeiu finite sau infinite, ale cărei mulţimi de zerouri este de prima categorie Baire, dar nu este de tipul G_δ. Pe de altă parte, folosind teorema lui Choquet, deja menţionată, am arătat că pentru fiecare mulţime frontieră E peste tot densă, de tipul G_δ şi de măsură nulă, există o derivată Pompeiu mărginită, continuă în fiecare punct din E şi pentru care E este chiar mulţimea zerourilor (loc. cit., pp.6—7). S-a demonstrat în acest fel existenţa unei derivate Pompeiu mărginite, discontinue aproape peste tot. Pe o altă cale, care nu foloseşte teorema lui Choquet, dar care se prevalează de proprietatea apartenenţei la clasa M_4 a lui Zahorski (clasă a cărei definiţie a fost amintită mai sus), existenţa derivatelor Pompeiu mărginite, discontinue aproape peste tot, a fost regăsită de către J. S. Lipiński în 1965 (într-un articol publicat în „Revue roumaine de mathématiques pures et appliquées"). Ca o curiozitate, menţionez că J. S. Lipiński dă acest rezultat ca răspuns la o întrebare

Scanned with CamScanner

pe care am pus-o în 1963 (loc. cit., p.31), fără să fi observat (nici noi nici d-sa) că, de fapt, răspunsul afirmativ la întrebarea în cauză („Există o derivată Pompeiu mărginită, a cărei mulţime de zerouri este de măsură nulă?") era dat chiar în articolul în care întrebarea era formulată (loc. cit., teorema 6, p.6).

În legătură cu dificultatea problemei privind structura mulţimii de zerouri ale unei derivate a lui Pompeiu sau ale unei derivate oscilante trebuie să observăm că această problemă nu este reductibilă la problema, mai simplă, a structurii mulţimii punctelor de continuitate. Este adevărat că orice punct de continuitate al unei derivate Pompeiu sau al unei derivate oscilante este un zero al acestei derivate, dar reciproca nu este adevărată. În unele exemple de mai sus, mulţimea punctelor de continuitate era inclusă în mulţimea zerourilor; dar există derivate Pompeiu mărginite, care se anulează în origine, fără a fi continue în origine (a se vedea teorema 2 din articolul menţionat al lui A. Bruckner, din 1965; din demonstraţia acestei teoreme rezultă că derivata în cauză este nenegativă, fapt nespecificat în enunţul teoremei). Un alt exemplu de derivată Pompeiu mărginită, pentru care mulţimea punctelor de continuitate nu coincide cu mulţimea zerourilor, a fost obţinut de către J. S. Lipiński (loc. cit., pp.448—449), cu ajutorul mulţimilor din clasa M_5 în sensul lui Zahorski. Amintim că o mulţime liniară E nevidă, de tipul borelian F_σ, este de clasa M_5 dacă orice punct din E este un punct de densitate (în sensul lui Lebesgue) pentru E, cu alte cuvinte, dacă pentru orice $x \in E$ avem:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\mu(E \cap (x - \varepsilon,\ x + \varepsilon))}{2\varepsilon} = 1.$$

J. S. Lipiński se prevalează, în construcţia sa, de o teoremă a lui Zahorski din 1950 (loc. cit., p.25), care afirmă că pentru orice mulţime E de clasă M_5 există o funcţie φ aproximativ continuă, cu proprietatea că $0 < \varphi(x) \leqslant 1$ pentru $x \in E$ şi $\varphi(x) = 0$ pentru $x \notin E$.

Se constată astfel că marile teoreme de caracterizare boreliană, categorială şi metrică a diferitelor mulţimi asociate în mod natural unei funcţii reale de o variabilă reală, teoreme obţinute cu precădere în deceniile al patrulea, al cincilea şi al şaselea ale secolului nostru, au permis pro-

grese esențiale în elucidarea structurii funcțiilor lui Pompeiu, iar acestea, la rîndul lor, s-au dovedit de o mare utilitate în realizarea progreselor menționate.

*

Un rol de seamă l-au jucat derivatele lui Pompeiu în elucidarea raporturilor dintre diferite extensiuni ale conceptului de continuitate. Și aici, ca și în topologie, aceste derivate au servit la obținerea unor contraexemple rare.

În 1952 și în 1953, H. P. Thielman a introdus și studiat (în „Proceedings of the Iowa Academy of Sciences" și, respectiv, în „American Mathematical Monthly") o clasă de funcții pe care le vom numi, fără legătură cu denumirea lor în engleză, pseudocontinue. O funcție f definită în spațiul metric $\langle X,d \rangle$, cu valori în spațiul metric $\langle X', d' \rangle$, este pseudocontinuă (în engleză: *cliquiss*) în punctul x din X dacă pentru orice sferă S care conține pe x există o sferă S_1 conținută în S pentru care $d'(f(y), f(z)) < \varepsilon$ oricare ar fi y și z în S_1.

O altă extensiune a continuității, în același cadru al spațiilor metrice, a fost studiată de A. P. Morse și W. W. Bledsoe în 1952 (în „Proceedings of the American Mathematical Society"). O funcție $f\colon \langle X,d \rangle \to \langle X',d' \rangle$ este învecinată (*neighborly*) în punctul $x \in X$ dacă pentru $\varepsilon > 0$ există o sferă S pentru care $d(x,y) + d'(f(x), f(y)) < \varepsilon$ oricare ar fi $y \in S$. Funcția f este învecinată în sens larg în punctul x dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există o sferă S cu proprietatea $d(x,y) + d'(f(y), f(z)) < \varepsilon$ oricare ar fi y și z în S.

În sfîrșit, o extensiune mai veche a continuității este aceea întreprinsă în 1932 de către S. Kempisty (în „Fundamenta Mathematicae"). O funcție f definită pe spațiul topologic $\langle X,\tau \rangle$, cu valori în spațiul topologic $\langle X',\tau' \rangle$ este cvasicontinuă în punctul x din X, dacă pentru orice vecinătate $U \ni x$ și pentru orice vecinătate $V \ni f(x)$ există o mulțime deschisă $G \subseteq U$ pentru care $f(G) \subseteq V$.

Este ușor de demonstrat că, pentru funcțiile definite într-un spațiu metric, cu valori într-un spațiu metric, proprietatea de cvasicontinuitate este echivalentă cu proprietatea de învecinare (am arătat acest lucru în 1958, în „Proceedings of the American Mathematical Society") și că pseudocontinuitatea este echivalentă cu învecinarea în sens larg.

De asemenea, cvasicontinuitatea implică pseudocontinuitatea, fără ca reciproca să fie adevărată (am dat acest rezultat în 1961, în „Colloquium mathematicum").

Toate aceste aplicații și echivalențe se referă la comportarea într-un punct. Se pune în mod natural problema: Cît de importantă poate fi mulțimea punctelor în care o funcție este pseudocontinuă, fără a fi cvasicontinuă? Pentru funcțiile definite într-un spațiu metric complet, am arătat (1961, loc. cit.) că această mulțime este totdeauna de prima categorie Baire, deci neglijabilă din punctul de vedere al categoriei Baire. De fapt, acest lucru este adevărat chiar pentru mulțimea mai mare a punctelor în care o funcție este pseudocontinuă fără a fi continuă. Mai rămînea de văzut dacă și din punctul de vedere al măsurii este neglijabilă mulțimea în discuție. Utilizarea derivatelor lui Pompeiu mărginite ne-a permis să arătăm (1961, loc. cit.) că răspunsul este negativ. Pentru orice derivată Pompeiu finită, punctele de pseudocontinuitate care nu sînt puncte de cvasicontinuitate formează o mulțime de măsură pozitivă în orice interval. În plus, orice derivată Pompeiu finită este pseudocontinuă în orice punct. Apare astfel interesant faptul că, pentru orice derivată Pompeiu finită, punctele în care ea nu este învecinată formează o mulțime de măsură pozitivă în orice interval (1958, teorema 4, loc. cit.; această teoremă a fost enunțată în 1958 într-o formă mai slabă, dar examinarea demonstrației arată că ea se menține și sub forma dată aici. O observație similară trebuie făcută și pentru rezultatul menționat mai sus, din 1961).

Se știe că o funcție absolut continuă, a cărei derivată este egală cu zero aproape peste tot, se reduce la o constantă. O funcție cu derivată mărginită este absolut continuă, deci o funcție cu derivată mărginită pe $[a,b]$ nu poate avea derivată nulă aproape peste tot pe $[a,b]$ fără a se reduce la o constantă. Este naturală întrebarea dacă analogul acestei întrebări în termeni de categorie Baire are un răspuns similar. Cu alte cuvinte: Fiind dată o funcție f cu derivată mărginită pe $[a,b]$ și presupunînd că derivata f' se anulează pe complementara în raport cu $[a,b]$ a unei mulțimi de prima categorie Baire din $[a,b]$, rezultă că f se reduce la o constantă? În 1960 am arătat (în „Colloquium mathematicum") că răspunsul este negativ: Există o funcție continuă și strict crescătoare, cu derivată mărginită pe $[a,b]$, derivata anulîndu-se în fiecare punct

Scanned with CamScanner

al complementarei unei mulţimi de prima categorie. Însă, dacă examinăm demonstraţia acestei teoreme, constatăm că de fapt s-a demonstrat mai mult: Orice derivată Pompeiu finită se anulează pe complementara unei mulţimi de prima categorie. Deci orice primitivă a unei derivate Pompeiu finită constituie un exemplu de tipul căutat.

*

Monotonia funcţiilor lui Pompeiu contrastează cu nemonotonia în orice interval a funcţiilor lui Köpcke. Este de aşteptat ca acest fapt să se traducă printr-o deosebire puternică de structură între derivatele lui Pompeiu şi derivatele lui Köpcke. După cum am amintit mai sus, în articolul privind derivatele lui Pompeiu şi derivatele lui Köpcke, pe care l-am publicat în 1963, am demonstrat, cu ajutorul unui rezultat al lui Choquet, existenţa unei derivate Pompeiu mărginite, discontinue aproape peste tot (fapt regăsit în 1965 de către J. S. Lipiński). Apare în mod legitim întrebarea: Există această posibilitate şi pentru derivatele lui Köpcke? Cu alte cuvinte, există o derivată Köpcke mărginită — sau măcar finită — care să fie discontinuă aproape peste tot? Nu cunoaştem răspunsul la această întrebare, dar îl bănuim afirmativ.

Aspecte interesante ale derivatelor oscilante pot fi identificate dacă se ţine seama de ciclul de articole ale lui K. M. Garg privind funcţiile continue nicăieri monotone (primul publicat în 1962 în „Annales Univ. Scientiarum Budapestinensis de Rolando Eötvös nominatae", iar următoarele două în 1962 şi 1963 în „Revue roumaine de mathématiques pures et appliquées").

Derivatele lui Köpcke au comun cu derivatele lui Pompeiu faptul că mulţimea zerourilor şi complementara acestei mulţimi sînt amîndouă dense în intervalul de definiţie al acestor derivate. De aici decurge o anumită structură comună, dată de proprietăţi ca: pozitivitatea măsurii complementarei mulţimii de zerouri, neintegrabilitatea riemanniană, faptul că mulţimea zerourilor este un rezidual, adică o complementară de mulţime de prima categorie Baire (acest din urmă fapt rezultă dintr-o propoziţie de topologie, conform căreia orice mulţime G_δ frontieră este de prima categorie; a se vedea, de exemplu, p.49 a vol.I din tratatul de topologie al lui C. Kuratowski). Dar, dincolo

de această structură comună, cele două clase de derivate se opun prin atitudinea lor diferită în raport cu fenomenul de monotonie. Putem încerca o clasificare a derivatelor lui Köpcke din punctul de vedere al gradului lor de abatere față de derivatele lui Pompeiu. Am observat mai sus că derivatele lui Köpcke a căror primitivă este cu variație mărginită pot fi considerate o clasă intermediară în raport cu derivatele lui Köpcke a căror primitivă este cu variație nemărginită, pe de o parte, și derivatele lui Pompeiu, pe de altă parte. O altă posibilitate de departajare a derivatelor lui Köpcke ne este oferită de clasificarea funcțiilor nicăieri monotone în funcții de prima specie și funcții de-a doua specie (a se vedea articolul al treilea din ciclul lui K. M. Garg, semnalat mai sus). O funcție f nicăieri monotonă în intervalul I este de prima specie în I dacă există un număr real r pentru care funcția $f(x) + rx$ este monotonă în I; o funcție nicăieri monotonă pentru care nu există un număr r cu proprietatea menționată este de-a doua specie în I. Aceasta constituie o ușoară modificare a unor definiții mai vechi, conform cărora o funcție $f(x)$ oscilantă în orice interval din I este de prima specie dacă există două numere l și m pentru care $f(x) + lx + m$ este monotonă în I și este de-a doua specie dacă nu este de prima specie (a se vedea pp.374—375 din tratatul menționat al lui Hobson). De fapt, cele două definiții sînt echivalente, deoarece două funcții care diferă printr-o constantă sînt sau amîndouă monotone sau amîndouă nemonotone.

O derivată f' a lui Köpcke, mărginită inferior sau superior, admite totdeauna ca primitivă o funcție nicăieri monotonă (adică oscilantă) de prima specie. Într-adevăr, din existența unui număr m cu proprietatea $f'(x) > m$ pentru $x \in I$ rezultă că $f(x) - mx$ este crescătoare pe I, deci f este de prima specie. Dacă $f'(x) < m$, $f(x) - mx$ este descrescătoare, deci din nou f este de prima specie. Din faptul că f' schimbă semnul în orice interval rezultă că f nu este monotonă în nici un interval.

Reciproc, dacă o derivată $f'(x)$ admite ca primitivă o funcție nicăieri monotonă (adică oscilantă) de prima specie, atunci această derivată este de tipul lui Köpcke și este superior sau inferior mărginită. Într-adevăr, din faptul că există m astfel încît $f(x) + mx$ este monotonă, rezultă că $f'(x) + m$ păstrează un semn constant, deci f' este

superior sau inferior mărginită, după cum $f'(x) + m < 0$ sau $f'(x) + m > 0$. Pe de altă parte, din faptul că f este oscilantă rezultă că f' schimbă semnul în orice interval.

O derivată $f'(x)$ a lui Köpcke, nemărginită nici inferior, nici superior în nici un interval din I, admite totdeauna ca primitivă în I o funcţie nicăieri monotonă de-a doua specie. Într-adevăr, dacă ar exista un număr m cu proprietatea că $f(x) + mx$ este monotonă în I, aceasta ar implica un semn constant pentru derivata $f'(x) + m$, deci mărginirea inferioară sau superioară a derivatei $f'(x)$, în contradicţie cu ipoteza.

Reciproc, dacă f este oscilantă de-a doua specie, atunci f' este o derivată a lui Köpcke şi nu este mărginită nici inferior nici superior, în nici un interval. Într-adevăr, dacă f' ar fi mărginită superior (inferior), atunci ar exista un număr m cu proprietatea că $f(x) + mx$ ar fi descrescătoare (respectiv crescătoare) în contradicţie cu ipoteza că f este de-a doua specie.

Putem sintetiza toate aceste rezultate în modul următor: Fiind dată o funcţie f care admite derivată f' pe intervalul I, f este oscilantă pe I dacă şi numai dacă f' este o derivată a lui Köpcke pe I; f este oscilantă de prima specie dacă şi numai dacă f' este o derivată a lui Köpcke, dar mărginită inferior sau superior; f este oscilantă de-a doua specie dacă şi numai dacă f' este o derivată a lui Köpcke, dar nemărginită atît inferior, cît şi superior, în orice interval. (Amintim că peste tot înţelegem prin funcţie oscilantă o funcţie care oscilează în orice interval.)

Toate aceste rezultate pot fi subsumate şi unui rezultat mai general al lui K. M. Garg (p.84 a celui de-al treilea articol din ciclul menţionat): O funcţie f continuă şi nicăieri monotonă este de prima specie în I dacă şi numai dacă unul (deci fiecare) dintre numerele ei derivate este mărginit superior sau inferior în I; f este de-a doua specie în I dacă şi numai dacă unul (deci fiecare) dintre numerele derivate este nemărginit atît inferior, cît şi superior, în orice interval din I.

Este clar că derivatele lui Köpcke a căror primitivă este cu variaţie mărginită conţin ca un caz particular derivatele lui Köpcke a căror primitivă este de prima specie. Într-adevăr, dacă f este de prima specie, există o funcţie φ monotonă, astfel încît $f(x) = \varphi(x) - mx$, deci, ca diferenţă a două funcţii monotone, f este cu variaţie

mărginită. Reciproca nu este adevărată; există derivate ale lui Köpcke a căror primitivă este cu variaţie mărginită, fără a fi de prima specie.

Rezultă aşadar o ierarhie în patru trepte a derivatelor avînd o mulţime frontieră şi densă de zerouri:

1) Derivatele lui Pompeiu (la rîndul lor ierarhizate în subclase ca: derivate Pompeiu mărginite, derivate Pompeiu finite, derivate Pompeiu — finite sau infinite).

2) Derivate ale lui Köpcke, a căror primitivă este cu variaţie mărginită şi de prima specie (şi acestea se pot departaja în mărginite, finite, finite sau infinite; însă nu este posibil ca derivata să fie nemărginită în orice interval, în particular, nu este posibil ca derivata să fie infinită în orice interval, deoarece în acest caz, conform unui rezultat stabilit mai sus, primitiva ar fi de-a doua specie).

3) Derivate ale lui Köpcke, a căror primitivă este cu variaţie mărginită, dar de-a doua specie (acestea se pot departaja în finite şi finite sau infinite, dar, conform unui rezultat de mai sus, nu pot fi mărginite în orice interval).

4) Derivate ale lui Köpcke a căror primitivă nu este cu variaţie mărginită (acestea se pot departaja în finite şi finite sau infinite).

În toate consideraţiile de mai sus, distincţia dintre funcţiile nicăieri monotone de prima specie şi cele nicăieri monotone de-a doua specie a fost operată doar la nivelul funcţiei primitive, nu şi la cel al derivatei. Ar fi interesant să se stabilească deosebirea de structură dintre derivatele oscilante de prima specie şi cele oscilante de-a doua specie (în ipoteza că fiecare dintre cele două specii este posibilă). Dintr-o propoziţie stabilită de K. M. Garg (p.85 a articolului al treilea din ciclul menţionat) rezultă că dacă o derivată oscilantă $f'(x)$ este de-a doua specie, atunci, pentru fiecare număr $r > 0$, fiecare interval I conţine fie o mulţime de măsură pozitivă de puncte în care cel puţin un număr derivat al funcţiei $f'(x)$ este mai mare ca r (mai mic decît $-r$), fie o mulţime densă de puncte în care cel puţin un număr derivat al lui $f'(x)$ este $+\infty(-\infty)$.

Să observăm că atît derivatele lui Pompeiu, cît şi derivatele lui Köpcke sînt derivate oscilante (adică nemonotone în nici un interval). Acest fapt accentuează importanţa întrebării: Există derivate oscilante de prima specie? Vom arăta că răspunsul este negativ. Într-adevăr, fie f' oscilantă, de prima specie pe I. Rezultă existenţa unui număr a

pentru care $f'(x) + ax$ este monotonă, deci f' este o funcţie cu variaţie mărginită pe I. Însă o derivată nu admite discontinuităţi de prima specie, în timp ce o funcţie cu variaţie mărginită nu admite discontinuităţi de-a doua specie; deci f' este continuă pe I. Avînd o mulţime densă de zerouri, f' este identic nulă, în contradicţie cu faptul că este oscilantă.

Rezultă că distincţia operată de Hobson şi Garg în clasa funcţiilor nicăieri monotone, prin introducerea noţiunilor de funcţie de prima specie şi funcţie de-a doua specie nu este aplicabilă la nivelul derivatelor oscilante, acestea fiind totdeauna de-a doua specie. Trebuie căutate alte criterii, mai fine, pentru departajarea intrinsecă a derivatelor oscilante. Distincţia *derivată a lui Pompeiu — derivată a lui Köpcke* este una din soluţiile posibile ale acestei probleme.

Primele trei trepte din ierarhia de mai sus furnizează cazuri particulare de funcţii cu variaţie mărginită, a căror derivată se anulează pe un rezidual. Este aici un analog — în termeni de categorie Baire — al aşa-numitelor funcţii singulare, care sînt, prin definiţie, funcţii cu variaţie mărginită a căror derivată se anulează aproape peste tot. O prezentare mai sistematică a funcţiilor singulare, cu bibliografia corespunzătoare, a fost publicată în 1969, de către K. M. Garg (în „Revue roumaine de mathématiques pures et appliquées"). În articolul deja menţionat, pe care l-am publicat în 1963, am studiat, sub numele de funcţii de tipul P_3, o clasă înrudită: aceea a funcţiilor continue, admiţînd o derivată nulă pe o mulţime frontieră peste tot densă (deci pe un rezidual!). În acelaşi articol am dat o atenţie specială operaţiilor cu funcţii şi cu derivate ale lui Pompeiu, dar unele probleme privind aceste operaţii au rămas nerezolvate. O condiţie necesară şi suficientă ca produsul a două funcţii Pompeiu cu derivată mărginită să fie de asemenea o funcţie Pompeiu cu derivată mărginită a fost dată de către Umberto Olivieri în 1968 (în „Rendiconti del Circolo matematico di Palermo"). Acelaşi autor stabileşte şi alte rezultate interesante privind operaţiile cu funcţiile lui Pompeiu.

Şirul surprizelor pe care ni le-au rezervat funcţiile lui Pompeiu nu se încheie aici. În 1952 (într-un articol publicat în „Buletinul ştiinţific al Academiei, Seria matematică") profesorul Alexandru Froda stabileşte o legătură neaşteptată între două dintre cele mai interesante fenomene

patologice pe care le cunoaşte analiza matematică: ecuaţiile lui Lavrentiev şi funcţiile lui Pompeiu. În 1925, M. Lavrentiev pusese în evidenţă un fenomen deosebit de interesant. Se ştia de multă vreme că proprietatea de continuitate a funcţiei $f(x,y)$ este suficientă pentru a garanta, pentru fiecare punct (x_0,y_0) din intervalul bidimensional de definiţie a funcţiei $f(x,y)$, existenţa unei soluţii a ecuaţiei diferenţiale $y' = f(x,y)$ care trece prin punctul (x_0,y_0). Se ştia de asemenea că proprietatea de continuitate a funcţiei $f(x,y)$ nu este suficientă pentru a garanta, pentru fiecare punct (x_0,y_0), unicitatea soluţiei care trece prin (x_0,y_0), dar nu era clar cît de mult poate fi încălcată unicitatea soluţiei, cu alte cuvinte, cît de mare (în sensul măsurii, al categoriei şi al cardinalităţii) poate fi mulţimea punctelor prin care soluţia nu este unică şi cît de multe soluţii pot să treacă prin aceste puncte. Lavrentiev dăduse în 1925 un răspuns complet la aceste întrebări, producînd un exemplu de funcţie $f(x,y)$ continuă pentru $a < x < b$, $c < y < d$, astfel încît prin fiecare punct (x_0,y_0) din intervalul bidimensional de continuitate a funcţiei f trec o infinitate de soluţii ale ecuaţiei diferenţiale $y' = f(x,y)$, soluţii care sînt distincte două cîte două într-o vecinătate destul de mică a punctului (x_0,y_0).

Alexandru Froda a reuşit să arate că fiecare funcţie a lui Pompeiu dă naştere unei ecuaţii diferenţiale de tipul $y' = f(x,y)$, avînd toate proprietăţile ecuaţiei lui Lavrentiev, cu excepţia proprietăţii de continuitate a funcţiei f. Mai precis, Alex. Froda a arătat că dacă $G(t)$ este o funcţie continuă, strict crescătoare pe $[\alpha,\beta]$, avînd o derivată $G'(t)$ finită pe $[\alpha,\beta]$, atunci, notînd cu $F(x)$ inversa funcţiei G şi cu $[a,b]$ intervalul de definiţie al funcţiei F, ecuaţia diferenţială

$$y' = \frac{1}{F'(y)}$$

va avea, în intervalul bidimensional $a \leqslant x \leqslant b$, $F(a) \leqslant y \leqslant F(b)$, proprietatea că prin fiecare punct (x_0,y_0) trec o infinitate de soluţii ale ecuaţiei, soluţii distincte două cîte două într-o vecinătate anumită a punctului (x_0,y_0). Faptul că funcţia din membrul al doilea al ecuaţiei lui Froda admite în intervalul bidimensional $a \leqslant x \leqslant b$, $F(a) \leqslant y \leqslant F(b)$ o mulţime densă de puncte de discontinuitate nu deranjează prea mult. Proprietatea de continuitate

era considerată de Lavrentiev datorită faptului că ea garanta existența soluției. Însă în cazul ecuației lui Froda această existență este oricum garantată pentru fiecare punct, indiferent de faptul că aceasta este sau nu un punct de continuitate al funcției $1/F'(y)$.

Să mai observăm că, cu prilejul construcției sale, Alex. Froda arată că există derivate Pompeiu finite pe toată axa reală, ale căror primitive iau toate valorile reale.

Și în construcția lui Froda s-a putut vedea avantajul pe care-l oferă derivatele lui Pompeiu în raport cu derivatele oscilante. Posibilitatea de a considera derivata inversei funcției lui Pompeiu era legată în mod esențial de faptul că aceasta este strict monotonă.

*

Ulterior s-a trecut la studiul global al clasei funcțiilor lui Pompeiu cu derivată finită și al funcțiilor cu derivată oscilantă finită, arătîndu-se, de către G. Petruška și M. Laczkovich (sub tipar la „Acta mathematica Acad. Scientiarum Hungaricae"), că această clasă constituie o mulțime peste tot densă în spațiul funcțiilor continue, prevăzut cu topologia convergenței uniforme. Este un argument tardiv, de ordin global, pentru caracterul neexcepțional al funcțiilor lui Pompeiu și al celor ale lui Köpcke în clasa mai largă a funcțiilor continue. Ar fi interesant însă de văzut dacă se poate spune același lucru despre situația funcțiilor lui Pompeiu în clasa funcțiilor strict crescătoare și continue.

În 1958 am arătat (într-un articol publicat în „Bulletin mathématique de la Société des sciences math. de la R. P. R.") că dacă două funcții derivate, integrabile Riemann pe $[a,b]$, coincid pe o mulțime densă din $[a,b]$, atunci ele sînt identice pe $[a,b]$. Derivatele mărginite ale lui Pompeiu ne-au permis să arătăm că teorema enunțată nu mai rămîne în vigoare dacă se renunță la ipoteza integrabilității Riemann.

În 1963 (în „Rendiconti del Circolo matematico di Palermo") am studiat diferite operații cu funcții Pompeiu și cu funcții Köpcke și diferite extensiuni ale derivatelor lui Pompeiu, printre care extensiunea care se obține prin înlocuirea derivatei ordinare cu derivata aproximativă.

*

O funcţie f definită pe $[a,b]$ are proprietatea M'_2 a lui Zahorski dacă pentru orice interval I nenul conţinut în $[a,b]$ mulţimile $\{x; f(x) > \alpha\}\cap I$ şi $\{x; f(x) < \alpha\}\cap I$ sînt de măsură pozitivă ori de cîte ori sînt nevide. Proprietatea lui Denjoy constă în faptul că mulţimea $\{x; \alpha < f(x) < \beta\}\cap I$ este de măsură pozitivă ori de cîte ori este nevidă. Pentru funcţiile de prima clasă Baire, L. Mišik a demonstrat în 1966 (în revista „Časopis pro pěstováni matematiky") că proprietatea lui Zahorski şi proprietatea lui Denjoy sînt echivalente şi implică proprietatea lui Darboux (fapt arătat încă de Zahorski, în memoriul său din 1950), fără a fi implicate de aceasta. Se punea, în aceste condiţii, problema raporturilor dintre cele trei proprietăţi în cazul funcţiilor de-a doua clasă Baire. Această problemă a fost rezolvată de L. Mišik şi J. S. Lipiński. În particular, J. S. Lipiński a arătat în 1967 (în „Časopis pro pěstováni matematiky") că, folosindu-se o derivată oscilantă ale cărei zerouri formează o mulţime de măsură nulă, se poate construi o funcţie de-a doua clasă Baire care are proprietatea M'_2 a lui Zahorski, dar este lipsită atît de proprietatea lui Denjoy, cît şi de proprietatea lui Darboux. Pe aceeaşi cale, se poate obţine un exemplu de funcţie de-a doua clasă Baire care are atît proprietatea lui Darboux, cît şi proprietatea M'_2 a lui Zahorski, dar este lipsită de proprietatea lui Denjoy.

*

Cea mai recentă utilizare a derivatelor lui Pompeiu pare să fie datorită lui J. S. Lipiński.

Fiind dată o funcţie reală $f(x,y)$ definită pe intervalul bidimensional $a \leqslant x \leqslant b$, $c \leqslant y \leqslant d$, se pune în mod natural problema legăturii dintre măsurabilitatea Lebesgue a funcţiei f în raport cu ansamblul variabilelor şi măsurabilitatea Lebesgue a funcţiilor ei parţiale $f(x,y_0)$, $f(x_0,y)$, obţinute prin fixarea valorii unuia sau altuia dintre argumente. Dintr-o teoremă clasică, rezultă că dacă $f(x,y)$ este măsurabilă, atunci, exceptînd o mulţime liniară de măsură nulă de valori ale lui y_0, respectiv x_0, funcţiile $f(x,y_0)$ şi $f(x_0,y)$ sînt măsurabile în raport cu x şi, respectiv, în raport cu y. Însă reciproca acestei teoreme nu este adevărată. Se cunosc funcţii $f(x,y)$ nemăsurabile, pentru care toate funcţiile parţiale (atît cele în raport cu x, cît

şi cele în raport cu y) sînt măsurabile. Mai mult, există o funcţie $f(x,y)$ nemăsurabilă, ale cărei funcţii parţiale sînt, toate, de prima clasă Baire şi au proprietatea lui Darboux. Acest fapt a fost stabilit în 1972 de către J. S. Lipiński (în „Bulletin de l'Académie polonaise des sciences"), iar în 1973 acelaşi autor a regăsit acest rezultat pe o cale diferită, folosindu-se de derivatele Pompeiu şi de teorema lui Choquet şi Maximov de caracterizare a transformatelor topologice ale derivatelor. În aceste condiţii, se pune problema de a se găsi condiţii cît mai largi asupra funcţiilor parţiale, care să asigure măsurabilitatea funcţiei $f(x,y)$. Deoarece proprietatea lui Darboux şi apartenenţa la prima clasă Baire se dovedesc a fi insuficiente pentru aceasta, este natural să ne întrebăm dacă proprietatea tuturor funcţiilor parţiale de a fi derivate finite generează măsurabilitatea funcţiei $f(x,y)$. Problema aceasta nu şi-a aflat încă răspunsul.

Derivatele mărginite ale lui Pompeiu sînt amplu prezentate în volumul al doilea (apărut în 1958) al tratatului de analiză matematică în trei volume, al prof. Miron Nicolescu.

O parte din rezultatele relative la derivatele lui Pompeiu sînt inventariate în articolul de sinteză asupra derivatelor, publicat în 1966 de către A. M. Bruckner şi J. L. Leonard (în „American Mathematical Monthly", Part. II).

*

Aceasta este imaginea — doar parţială — a modului în care funcţiile lui Pompeiu şi-au exercitat influenţa asupra dezvoltării moderne a analizei matematice şi a topologiei generale şi a modului în care acestea din urmă au permis aprofundarea structurii funcţiilor lui Pompeiu.

Cînd, în urmă cu vreo 17 ani, pregăteam pentru publicare opera matematică a lui Pompeiu, am fost frapat de eleganţa şi conciziunea expunerii sale, de eficacitatea observaţiilor sale, de aparenta facilitate a rezultatelor sale. Fără îndoială că reflecţia matematică era pentru Pompeiu în ordinea naturală a vieţii sale cotidiene; dacă, prin absurd, matematica n-ar fi existat, ar fi inventat-o, pentru că nu putea trăi fără ea. Simplitatea rezultatelor sale, rezonanţa lor îndepărtată contrastează cu atîtea speculaţii bazate pe

Scanned with CamScanner

o cantitate enormă de definiţii pe care ştiinţa le aruncă repede peste bord, nimeni nemaiamintindu-şi de ele.

Mirarea matematică a lui Pompeiu s-a exercitat totdeauna asupra unor chestiuni care se situau în cea mai firească prelungire a răspunsurilor existente. Lecţia pe care ne-o dă opera sa este în primul rînd aceea a modului de a te întreba. Dar după fiecare întrebare urmează o mişcare magică de baghetă, un pas care se refuză oricărei reţete, oricărui algoritm şi după care problema în discuţie îşi dezvăluie dintr-o dată o ipostază nouă.

Pompeiu a fost un mare matematician al faptului ciudat, în genul în care polonezii l-au avut pe Sierpiński. Un mare matematician al construcţiilor insolite, menite să incite curiozitatea unui mare număr de savanţi. Un tip de matematician care astăzi, la noi, se cultivă din păcate mai rar, dar pe care tineretul nostru matematic ar trebui să-l cunoască şi să-l frecventeze, pentru a evita o dezvoltare matematică unilaterală.

Scanned with CamScanner

SIMION STOILOW

Pînă la începutul secolului nostru se cunoşteau două feluri de proprietăţi punctuale pe care o funcţie le poate avea în domeniul ei de definiţie: proprietăţi locale, care au loc în *anumite* puncte, şi proprietăţi globale, care au loc în *toate* punctele din domeniul de definiţie. Se ştia, de exemplu, că o funcţie derivabilă pe $[a,b]$ este continuă în toate punctele din $[a,b]$, în timp ce o funcţie continuă pe $[a,b]$ poate fi derivabilă în unele puncte şi nederivabilă în alte puncte din $[a,b]$. Dar încă din secolul trecut, odată cu studiul seriilor trigonometrice, se constatase că mulţimea punctelor în care are loc o anumită proprietate poate prezenta o structură complicată (mulţimea punctelor de convergenţă ale unei serii trigonometrice, mulţimea punctelor de continuitate ale unei funcţii integrabile etc.), fapt care a constituit un puternic impuls pentru dezvoltarea teoriei mulţimilor. Începutul secolului nostru avea să promoveze un nou punct de vedere în studiul funcţiilor, cel legat de considerarea mulţimilor neglijabile. Între proprietăţile care au loc doar într-un punct sau în cîteva puncte şi cele care au loc în toate punctele de definiţie ale unei funcţii există o situaţie intermediară: aceea în care o funcţie posedă o anumită proprietate în fiecare punct în care ea este definită, *cu excepţia unei anumite mulţimi neglijabile*. Nu este vorba aici de o simplă apreciere psihologică; caracterul neglijabil urma să fie precizat în mod riguros, după un criteriu de întindere, de cardinalitate, de categorie Baire sau de altă natură. Fiecare problemă îşi are clasa ei de mulţimi neglijabile. O experienţă de 70 de ani a arătat că o clasă de mulţimi neglijabile este de obicei o clasă ereditară şi numărabil aditivă de mulţimi. Cele mai importante clase de acest fel sînt: clasa mulţimilor cel mult numărabile, clasa mulţimilor de măsură Lebesgue nulă şi clasa mulţimilor de prima categorie Baire. Fiind dată o clasă $\mathcal{F}$ de funcţii definite pe $[a,b]$, ei i se pot asocia

de obicei o proprietate P şi o clasă $\mathfrak{N}$ de mulţimi neglijabile, cu proprietatea că pentru fiecare funcţie f din $\mathfrak{F}$ există o mulţime A în $\mathfrak{N}$ astfel încît în orice punct din afara lui A funcţia f posedă proprietatea P. În cadrul celor mai multe clase de funcţii lucrurile se desfăşoară în aşa fel încît structura funcţiilor din clasă poate prezenta şi unele aspecte mai complicate, dar aceste complicaţii sînt îngrămădite pe o mulţime neglijabilă dintr-un anumit punct de vedere. Situaţia aceasta aminteşte de unele jocuri ale copiilor, cărora li se propune ca, aşezînd un desen într-un mod adecvat, să observe anumite obiecte, animale sau persoane care nu sînt observabile la o aşezare întîmplătoare a desenului. Aşezînd intervalul de definiţie al funcţiilor dintr-o anumită clasă într-un mod adecvat — adică sub forma unei descompuneri convenabile într-o mulţime neglijabilă şi complementara acesteia — va apărea pe aceasta din urmă o proprietate care nu are loc pe întregul interval de definiţie. Iată trei exemple, care sînt tot atîtea teoreme clasice ale analizei matematice. Fiecărei funcţii monotone pe intervalul $[a,b]$ i se asociază o mulţime cel mult numărabilă A, astfel încît în orice punct din $[a,b] - A$ funcţia este continuă. Fiecărei funcţii cu variaţie mărginită pe $[a,b]$ i se asociază o mulţime B de măsură Lebesgue nulă, astfel încît în orice punct din $[a,b] - B$ funcţia este derivabilă. Fiecărei funcţii de prima clasă Baire i se asociază o mulţime C de prima categorie Baire, astfel încît în orice punct din $[a,b] - C$ funcţia este continuă. Primele două teoreme sînt datorite lui Henri Lebesgue, în timp ce ultima teoremă a fost stabilită de către René Baire.

Toate aceste rezultate sînt cunoscute încă din primul deceniu al secolului nostru. De atunci s-au acumulat un număr mare de teoreme de acest fel, iar natura mulţimilor neglijabile s-a diversificat şi ea.

Primele decenii ale secolului nostru au adus însă în atenţia matematicienilor şi un alt tip de mulţimi neglijabile. Acestea nu mai sînt situate în domeniul de definiţie al funcţiei, ci în domeniul valorilor ei. Primele rezultate de acest fel sînt datorite lui Sierpiński şi Luzin. Teorema lui Sierpiński afirmă că mulţimea valorilor luate de o funcţie oarecare în punctele ei de extremum (strict sau nu) este cel mult numărabilă; cu alte cuvinte, pentru orice funcţie

$f: R \to R$ există o mulţime A cel mult numărabilă, conţinută în R, astfel încît, oricare ar fi punctul x pentru care $f(x)$ nu aparţine lui A, x nu este un punct de extremum pentru f. Teorema lui Luzin afirmă că valorile pe care o funcţie continuă le ia în punctele în care derivata ei se anulează formează o mulţime de măsură Lebesgue nulă.

Teoremele lui Sierpiński şi Luzin inaugurează deci un nou tip de mulţimi neglijabile, situate nu în domeniul de definiţie, ci în cel al valorilor funcţiei. Teorema lui Sierpiński este de fapt o simplă observaţie, la îndemînă azi oricărui student, ea revenind la faptul că o familie de intervale disjuncte două cîte două este obligatoriu cel mult numărabilă. Teorema lui Luzin corespunde şi ea aşteptărilor, fiind o prelungire a teoremei clasice conform căreia o funcţie a cărei derivată este identic nulă în $[a,b]$ este constantă în $[a,b]$. Prima teoremă de anvergură în care mulţimea neglijabilă este situată în domeniul valorilor şi care reuşeşte să pună în evidenţă o simplificare surprinzătoare a raporturilor dintre numerele derivate ale unei funcţii continue, în toate punctele în care funcţia ia valori care nu aparţin mulţimii neglijabile, a fost obţinută de Simion Stoilow în anul 1924. Înainte de a enunţa această teoremă, vom aminti că pentru orice valoare a a unei funcţii continue mulţimea $\{x ; f(x) = a\}$ este închisă. Punctele unei mulţimi liniare (închise) sînt de două feluri : de prima specie, dacă există un interval deschis, cu extremitatea în punctul considerat, conţinut în complementara mulţimii şi de a doua specie în cazul contrar. Printre punctele de prima specie pot exista şi puncte izolate în mulţimea închisă considerată.

Iată acum enunţul teoremei lui Stoilow :

Fie f o funcţie continuă pe $[a,b]$, cu valori reale. Există o mulţime reală A, de măsură Lebesgue nulă, astfel încît, pentru orice număr ξ care nu aparţine lui A are loc următoarea situaţie : În fiecare punct de prima specie al mulţimii $L_\xi = \{x ; f(x) = \xi\}$ numărul derivat inferior la stînga este egal cu numărul derivat superior la dreapta, iar numărul derivat superior la stînga este egal cu numărul derivat inferior la dreapta. În fiecare punct izolat al mulţimii L_ξ funcţia f admite derivată (deci cele patru numere derivate coincid). Dacă numerele derivate de o aceeaşi parte sînt mărginite în punctele mulţimii L_ξ (această parte putînd varia de la un punct la altul, deci fiind cînd stînga, cînd dreapta)

Scanned with CamScanner

atunci L_ξ este o mulţime finită; dacă aceste numere derivate sînt doar finite, atunci L_ξ este o mulţime cel mult numărabilă.

Singurul instrument folosit de Stoilow pentru a obţine această teoremă este teorema lui Lebesgue asupra derivabilităţii funcţiilor monotone. Teorema lui Stoilow pune în evidenţă o simplitate remarcabilă în comportarea unei funcţii continue, în orice punct în care ia o valoare care nu aparţine mulţimii neglijabile asociate. Pentru a aprecia această simplitate, este suficient să evaluăm numărul extraordinar de mare de posibilităţi combinatorii în ceea ce priveşte situaţia reciprocă a celor patru numere derivate, posibilităţi îngrămădite însă pe o mulţime a cărei imagine prin f este de măsură nulă; în celelalte puncte, o selecţie riguroasă reţine doar cîteva situaţii, care, în ipoteze foarte largi, obligă mulţimile de nivel să fie finite sau numărabile.

Din teorema sa, Stoilow deduce cu uşurinţă o teoremă a lui Saks, care generalizează teorema lui Luzin de mai sus şi care afirmă că valorile pe care o funcţie continuă le ia în punctele în care cel puţin un număr derivat este egal cu zero formează o mulţime de măsură nulă. Dar mai deduce şi o altă teoremă, mult mai importantă, care în acel moment domina teoria funcţiilor de o variabilă reală: teorema lui Denjoy asupra situaţiei numerelor derivate ale unei funcţii continue. Iată enunţul teoremei lui Denjoy: Fiind dată o funcţie f continuă pe $[a,b]$, cu valori reale, există o mulţime A conţinută în $[a,b]$, de măsură Lebesgue nulă, astfel încît în orice punct care nu aparţine lui A două numere derivate asociate (adică de aceeaşi parte a punctului) sînt sau egale şi finite sau diferite, unul cel puţin fiind infinit; două numere derivate opuse (adică cel inferior la stînga şi cel superior la dreapta sau cel superior la stînga şi cel inferior la dreapta) sînt sau finite şi egale sau amîndouă infinite, dar de semn diferit.

Este interesant să observăm şi analogiile, dar şi deosebirile dintre teorema lui Denjoy şi cea a lui Stoilow. Amîndouă se referă la situaţia numerelor derivate ale unei funcţii continue şi amîndouă pun în evidenţă o simplificare care se produce de îndată ce se înlătură o mulţime de măsură nulă. Dar în timp ce în teorema lui Denjoy această mulţime neglijabilă este situată în intervalul de definiţie al funcţiei, în teorema lui Stoilow ea este o parte din mulţimea valorilor funcţiei. Mai important ni se pare

faptul că simplificările puse în evidență de teorema lui Stoilow în complementara mulțimii neglijabile sînt mai mari și de o natură mai structurală decît simplificările corespunzătoare din teorema lui Denjoy. În această din urmă teoremă este vorba de o descriere atomistică, deci esențialmente punctuală, a comportării numerelor derivate pe complementara mulțimii neglijabile, în timp ce în teorema lui Stoilow se descrie comportarea numerelor derivate în termeni de mulțimi de nivel, indicîndu-se totodată cazuri precise în care aceste mulțimi de nivel sînt finite sau numărabile.

Faptul că teorema lui Denjoy poate fi dedusă din teorema lui Stoilow nu constituie un lucru senzațional, dacă ținem seama că fiecare dintre ele a fost stabilită cu ajutorul teoremei lui Lebesgue, privind derivabilitatea funcțiilor monotone. Rămîne în orice caz probată în acest fel posibilitatea de a așeza teorema lui Stoilow la baza teoremelor de derivare în care mulțimile neglijabile sînt situate în domeniul de definiție al funcției. Ceea ce ni se pare mai important este faptul că *teorema lui Stoilow constituie obîrșia comună a unui întreg șir de teoreme astăzi clasice, dar obținute ulterior teoremei lui Stoilow și fără ca autorii lor să se fi prevalat de ea.* Vom prezenta în cele ce urmează această situație bizară, în care mai mulți matematicieni de seamă, ca Banach, Saks și Minakshisundaram, au putut să-și complice căile de acces la niște rezultate pe care teorema lui Stoilow le implica într-un mod simplu și elegant. Lucrul este cu atît mai de mirare cu cît teorema lui Stoilow a fost publicată în două reviste de mare circulație: „Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris" (în 1924) și „Bulletin de la Société Mathématique de France" (în 1925). Am semnalat toate acestea încă în 1957, în volumul omagial dedicat lui Simion Stoilow, cu prilejul celei de a 70-a aniversări. Încă atunci am exprimat posibilitatea de a desprinde din teorema lui Stoilow consecințe mult mai puternice decît cele pe care le-am putut degaja și care nu utilizează din teorema în discuție decît faptul că în fiecare punct izolat al unei mulțimi de nivel neexcepționale există derivată. Probabil că o bună parte din capitolul IX al cărții lui Saks *Theory of the integral* poate fi clădită pe teorema în discuție a lui Stoilow.

Vom nota cu A mulțimea neglijabilă din teorema lui Stoilow.

Se spune, după Banach, că o funcție f satisface condiția T_1, dacă valorile pe care f le ia de o infinitate de ori formează o mulțime de măsură nulă. S. Saks a demonstrat în 1931 (deci la șapte ani după publicarea teoremei lui Stoilow) următorul rezultat: O condiție necesară și suficientă pentru ca o funcție f continuă să satisfacă condiția T_1 este ca valorile pe care f le ia în punctele în care nu există derivată (finită sau infinită) să formeze o mulțime de măsură nulă.

Să regăsim acest rezultat cu ajutorul teoremei lui Stoilow. Să stabilim mai întîi necesitatea condiției. Fie ξ o valoare care nu aparține lui A și care este luată de f doar într-un număr finit de puncte. Mulțimea $\{x\,;\, f(x) = \xi\}$ este deci formată exclusiv din puncte izolate. Rezultă, în virtutea teoremei lui Stoilow, că f are derivată în fiecare punct din L_ξ. Orice valoare luată de f într-un punct în care nu are derivată este deci o valoare luată de o infinitate de ori. Însă astfel de valori formează, prin ipoteză, o mulțime de măsură nulă. Condiția este deci necesară. În ceea ce privește suficiența condiției, ea este imediată, dacă ținem seama de teorema lui Luzin, despre care a fost vorba mai sus. Deoarece din teorema lui Stoilow rezultă o teoremă care generalizează teorema lui Luzin (așa cum am semnalat mai sus), putem spune că și suficiența condiției rezultă din teorema lui Stoilow. Teorema lui Saks este astfel complet demonstrată.

Se spune, după Banach, că o funcție f satisface condiția T_2, dacă valorile luate de f de o infinitate nenumărabilă de ori formează o mulțime de măsură nulă. S. Saks a stabilit în 1931 teorema următoare: Dacă f satisface pe $[a,b]$ condiția T_2, atunci $-\mu f(N) \leqslant f(b) - f(a) \leqslant \mu \cdot f(P)$, unde P, respectiv N, reprezintă mulțimea punctelor din $[a,b]$ în care f posedă derivată nenegativă, respectiv nepozitivă, iar μ reprezintă măsura Lebesgue. Mulțimea $D = P \cup N$ este nenumărabilă, cel puțin una dintre mulțimile $f(P)$, $f(N)$ fiind de măsură pozitivă (a se vedea și pp. 280–281 din monografia menționată a lui Saks, din 1937).

Din teorema lui Stoilow nu numai că putem regăsi această teoremă a lui Saks, dar putem deduce și următorul rezultat mai puternic: Fie f continuă și satisfăcînd condiția T_2 pe $[a,b]$. Fie D mulțimea punctelor din $[a,b]$ în care f are derivată (finită sau infinită). În aceste condiții, mulțimea $[m,M] - f(D)$ este de măsură nulă. (Prin m

Scanned with CamScanner

şi M am notat marginile inferioară şi superioară ale lui f pe $[a,b]$). Pentru demonstraţie, să notăm cu B mulţimea de măsură nulă a valorilor pe care f le ia de o infinitate nenumărabilă de ori. Fie ξ un număr care nu aparţine mulţimii $A \cup B$. Mulţimea L_ξ fiind închisă şi numărabilă, conţine un punct izolat x_0. Conform teoremei lui Stoilow, f admite o derivată unică (finită sau infinită) în x_0, deci x_0 aparţine lui D, iar mulţimea $[m,M] - f(D)$ este de măsură nulă.

Să observăm că de fapt avem următorul rezultat mai general: Dacă, exceptînd o mulţime de măsură nulă de nivele, fiecare nivel al unei funcţii continue f conţine un punct izolat, atunci mulţimea $[m,M] - f(D)$ este de măsură nulă.

Se spune, după Luzin, că funcţia f posedă proprietatea N, dacă imaginea, prin f, a oricărei mulţimi de măsură nulă este de asemenea o mulţime de măsură nulă. Rezultatul pe care tocmai l-am obţinut ne permite să regăsim şi să întărim o remarcabilă teoremă dată de Banach în 1926: Pentru orice funcţie continuă, cu proprietatea N, punctele de derivabilitate formează o mulţime de măsură strict pozitivă. Faţă de această teoremă a lui Banach, vom stabili următoarea întărire a teoremei lui Banach: Dacă f este continuă şi are proprietatea N pe $[a,b]$ atunci, notînd cu V mulţimea valorilor lui f în punctele de derivabilitate, mulţimea $[m,M] - V$ este de măsură nulă. Pentru demonstraţie, să amintim că o funcţie continuă, cu proprietatea N, satisface condiţia T_2 (rezultat stabilit de Banach în 1926) deci, în conformitate cu rezultatul pe care tocmai l-am obţinut, mulţimea $[m,M] - f(D)$ este de măsură nulă. Să notăm cu F mulţimea punctelor de derivabilitate ale lui f. Se ştie că mulţimea $D - F$ este de măsură nulă. În virtutea proprietăţii N a lui f, mulţimea $f(D - F)$ va fi de asemenea de măsură nulă. Rezultă că mulţimea $[m,M] - V$ este de măsură nulă.

Vom mai fructifica o dată teorema lui Stoilow, pentru a obţine o întărire a următoarei teoreme date de Minakshisundaram în 1940: Dacă f este continuă şi nederivabilă în fiecare punct din $[a,b]$, atunci există o mulţime E de măsură nulă în $[m,M]$, astfel încît, pentru orice $\xi \in [m,M] - E$, mulţimea L_ξ este nevidă, perfectă şi nicăieri densă. Iată rezultatul pe care-l vom deduce din teorema lui Stoilow: Dacă valorile pe care o funcţie continuă

f le ia în punctele în care derivata există (finită sau infinită) formează o mulţime de măsură nulă, atunci există o mulţime E de măsură nulă astfel încît, pentru orice $\xi \in [m,M] - E$, mulţimea L_ξ este nevidă, perfectă şi nicăieri densă. Într-adevăr, în cazul contrar mulţimea L_ξ ar conţine un punct izolat, deci un punct în care ar exista derivata. Însă, conform ipotezei, aceasta este posibil numai pentru o mulţime de măsură nulă de valori ξ. În plus, este evident că pentru orice funcţie f continuă mulţimea L_ξ este nicăieri densă, cu excepţia unei mulţimi numărabile de valori ξ.

Trei lucruri sînt de observat pe marginea consideraţiilor de mai sus:

a) Teorema lui Stoilow a permis o unificare a unor rezultate care altfel apăreau disparate, sursa lor comună fiind chiar teorema lui Stoilow.

b) În cazul teoremelor lui Banach, Minakshisundaram şi cea de a doua teoremă a lui Saks, teorema lui Stoilow nu numai că a permis regăsirea lor, dar a condus la ameliorarea lor sensibilă.

c) De fiecare dată, rezultatele au fost obţinute pe o cale rapidă, care contrastează cu demonstraţiile laborioase propuse de autorii teoremelor în cauză, ulterior teoremei lui Stoilow. În fapt, fiecare dintre aceste demonstraţii a refăcut, într-un fel sau altul, un raţionament sau un fapt care se aflau deja implicate în demersul lui Stoilow.

Dacă mai adăugăm la toate acestea şi faptul deja remarcat, că în toate raţionamentele de mai sus nu s-a utilizat decît o mică parte din teorema lui Stoilow (cea relativă la punctele izolate ale mulţimilor de nivel), ne dăm seama de impactul ei deosebit asupra teoriei funcţiilor reale.

Această situaţie m-a determinat în 1958 să propun lui Marius Iosifescu, pe atunci student în ultimul an, astăzi eminent matematician, de a întreprinde un examen critic al întregii situaţii pe care o prezenta teorema în discuţie. Rezultatul obţinut de Marius Iosifescu măreşte considerabil impactul teoremei lui Stoilow, dîndu-i acesteia o ameliorare pe care nu o putem numi altfel decît teorema Stoilow-Iosifescu şi care constă în validitatea teoremei lui Stoilow în ipoteza că funcţia în cauză satisface doar proprietatea lui Darboux (se ştie că această proprietate este implicată de proprietatea de continuitate, dar nu şi reciproc). Mai precis, înlocuind în enunţul teoremei lui Stoilow

cuvîntul *continuă* prin cuvintele *cu proprietatea lui Darboux,* teorema rămîne adevărată. Precizăm însă că avem aici în vedere numai prima parte din teorema lui Stoilow, aceea care se referă la puncte de prima specie și la puncte izolate, nu și partea a doua, care dă condiții suficiente ca o mulțime de nivel să fie finită sau numărabilă. Comportarea acestei ultime părți din teorema lui Stoilow în raport cu înlocuirea proprietății de continuitate cu o proprietate mai generală ar merita să facă obiectul unor investigații ulterioare. Ideea lui Iosifescu constă în a degaja ceea ce el numește proprietatea (m). O funcție f are această proprietate într-un mod unilateral într-un punct x_0 dacă, de o parte a lui x_0, pe un segment convenabil ales cu o extremitate în x_0, avem sau numai $f(x) > f(x_0)$, sau numai $f(x) < f(x_0)$. Funcția f are proprietatea (m) într-un mod bilateral în x_0, dacă, de o parte și de alta a lui x_0, pe segmente convenabil alese cu o extremitate în x_0 avem sau numai $f(x) < f(x_0)$ sau numai $f(x) > f(x_0)$. Se observă ușor că proprietatea (m) unilaterală poate avea loc numai în punctele de prima specie ale mulțimilor de nivel, iar proprietatea (m) bilaterală numai în punctele izolate ale mulțimilor de nivel. Iosifescu stabilește mai întîi o variantă a teoremei lui Stoilow pentru funcții arbitrare, variantă în care punctele de prima specie în raport cu o mulțime de nivel sînt înlocuite prin puncte cu proprietatea (m) în raport cu o astfel de mulțime, iar mulțimea neglijabilă este transferată în intervalul de definiție al funcției. Anume, el arată că oricare ar fi funcția reală f definită pe $[a,b]$ există două mulțimi Z și W de măsură nulă în $[a,b]$ astfel încît în orice punct din $[a,b] - Z$ în care f are proprietatea (m) unilaterală există un număr derivat (finit sau infinit) care este egal cu numărul derivat opus; în orice punct din $[a,b] - Z$ în care f are proprietatea (m) bilaterală există derivată unică (finită sau infinită); în orice punct din $[a,b] - W$ în care f are proprietatea (m) unilaterală există un număr derivat finit care este egal cu numărul derivat opus; în orice punct din $[a,b] - W$ în care f are proprietatea (m) bilaterală există o derivată unică finită. Un caz remarcabil în care are loc proprietatea (m) se dovedește a fi tocmai cel al funcțiilor cu proprietatea lui Darboux, unde proprietatea (m) unilaterală are loc exact în punctele de prima specie în mulțimile lor de nivel, iar proprietatea (m) bilaterală are loc exact în punctele izolate

în mulţimile lor de nivel. Faptul acesta îl conduce imediat pe Iosifescu la următoarea teoremă: Fie f o funcţie cu proprietatea lui Darboux în $[a,b]$. Există două mulţimi Z şi W de măsură nulă, astfel încît: În orice punct din $[a,b] - Z$, de prima specie în mulţimea sa de nivel, există un număr derivat (finit sau infinit) care este egal cu numărul derivat opus; în orice punct din $[a,b] - Z$, izolat în mulţimea sa de nivel, există o derivată unică (finită sau infinită); în orice punct din $[a,b] - W$, de prima specie în mulţimea sa de nivel, există un număr derivat finit, care este egal cu numărul derivat opus; în orice punct din $[a,b] - W$, izolat în mulţimea sa de nivel, există o derivată unică finită.

Observăm că partea din această teoremă care se referă la mulţimea neglijabilă Z diferă de teorema lui Stoilow doar prin două elemente: continuitatea funcţiei a fost înlocuită cu proprietatea lui Darboux, iar mulţimea neglijabilă, de măsură nulă, a coborît din mulţimea valorilor în intervalul de definiţie al funcţiei. Lucrurile se desfăşoară ca şi cum, la întrebarea: Se poate extinde teorema lui Stoilow de la funcţii continue la funcţii cu proprietatea lui Darboux? obţinem răspunsul: Da, cu condiţia ca mulţimea neglijabilă să fie transferată în intervalul de definiţie. Acest transfer este „plata" care ni se cere, deocamdată, pentru efectuarea extensiunii propuse. Dar pentru această plată obţinem, în plus, şi o variantă „de finitudine" a teoremei lui Stoilow, o variantă care arată că prin efectuarea transferului în discuţie ne putem aranja în aşa fel încît toate numerele derivate despre care este vorba în teorema lui Stoilow să fie finite; este exact ceea ce se întîmplă în partea a doua a teoremei lui Iosifescu de mai sus, adică partea care se referă la mulţimea neglijabilă W.

Să ne permitem o mică digresiune şi să considerăm cazul particular al unei funcţii cu proprietatea lui Darboux, ale cărei mulţimi de nivel sînt, toate, discrete. Aceasta înseamnă că orice punct din $[a, b]$ este izolat în mulţimea sa de nivel, deci, conform teoremei de mai sus (ultima parte relativă la mulţimea neglijabilă W), funcţia considerată este derivabilă aproape peste tot. Se regăseşte astfel o teoremă dată de A. Marchaud, în 1933, pentru funcţii continue, şi extinsă de noi, în 1957, la funcţii cu proprietatea lui Darboux. Dar, după cum arată Marius

Iosifescu, rezultatul nostru poate fi la rîndul său ameliorat, observîndu-se că mulţimea punctelor de discontinuitate ale unei funcţii cu proprietatea lui Darboux, ale cărei mulţimi de nivel sînt discrete, nu este doar de măsură nulă, ci chiar numărabilă. Un rol esenţial în stabilirea acestui fapt îl joacă faptul că o funcţie cu proprietatea lui Darboux, ale cărei mulţimi de nivel sînt discrete, are în orice punct proprietatea (m) bilaterală.

Sîntem acum în măsură să prezentăm extensiunea lui Iosifescu a teoremei lui Stoilow, adică 'să arătăm că acel preţ pe care l-am plătit pentru a putea înlocui în enunţul teoremei lui Stoilow cuvintele „funcţie continuă" prin „funcţie cu proprietatea lui Darboux" nu este obligatoriu. Cu alte cuvinte, referindu-ne la funcţii cu proprietatea lui Darboux, putem aduce mulţimea neglijabilă de măsură nulă înapoi în mulţimea valorilor funcţiei, fără a afecta celelalte prevederi din teorema lui Stoilow. Vom vedea totuşi că ceva se pierde; partea „de finitudine", relativă la mulţimea neglijabilă W, nu va mai putea fi salvată prin readucerea mulţimii neglijabile în mulţimea valorilor funcţiei.

Vom avea mai întîi nevoie de o lemă: Dacă φ este o funcţie monotonă pe $[a,b]$, iar N_φ este mulţimea punctelor din $[a,b]$ în care φ nu admite derivată (finită sau infinită), atunci măsura Lebesgue a mulţimii $\varphi(N_\varphi)$ este egală cu zero. Pentru demonstraţie, să observăm mai întîi că este suficient să ne referim la funcţii strict monotone — de exemplu, strict crescătoare. Într-adevăr, dacă φ ar fi crescătoare într-un mod nestrict, funcţia ψ dată de $\psi(x) = \varphi(x) + x$ ar fi strict crescătoare şi, admiţînd că lema a fost stabilită în acest din urmă caz, ar rezulta că $\mu(\psi(N_\psi)) = 0$ (prin μ notăm măsura Lebesgue). Însă $N_\psi = N_\varphi$ şi $\psi(x_2) - \psi(x_1) > \varphi(x_2) - \varphi(x_1)$ pentru $x_2 > x_1$, deci $\mu(\varphi(N_\varphi)) = 0$. Rămîne deci să stabilim lema pentru φ strict crescătoare. Notînd cu φ^{-1} inversa lui φ, definită pe $\varphi([a,b])$, avem $N_{\varphi^{-1}} \supseteq \varphi(N_\varphi)$ (convenim ca punctele din $\varphi([a,b])$ în care mulţimea $\varphi([a,b])$ nu se acumulează bilateral să fie considerate puncte în care φ^{-1} nu admite derivată — finită sau infinită; mulţimea acestor puncte este cel mult numărabilă). Însă φ^{-1} este şi ea monotonă, deci $\mu(N_{\varphi^{-1}}) = 0$ (în virtutea teoremei lui Lebesgue), deci cu atît mai mult, în baza incluziunii de mai sus, avem $\mu(\varphi(N_\varphi)) = 0$ şi lema este complet demonstrată.

Scanned with CamScanner

Pentru a obţine acum extensiunea lui Iosifescu a teoremei lui Stoilow vom mai avea nevoie de o noţiune: aceea de traiectorie monotonă asociată unei funcţii f într-un punct raţional r din intervalul ei de definiţie. Asociind lui f în r funcţiile

$$f^+(x) = \sup_{y \in [r,\, x]} f(y) \quad \text{pentru } r \leqslant x < b;$$

$$f_+(x) = \inf_{y \in [r,\, x]} f(y) \quad \text{pentru } r \leqslant x < b;$$

$$f^-(x) = \sup_{y \in [x,\, r]} f(y) \quad \text{pentru } a < x \leqslant r;$$

$$f_-(x) = \inf_{y \in [x,\, r]} f(y) \quad \text{pentru } a < x \leqslant r,$$

vom numi aceste funcţii (evident monotone: prima şi a treia monoton crescătoare, iar a doua şi a patra monoton descrescătoare) *traiectoriile monotone asociate funcţiei f în punctul raţional r*. Deoarece mulţimea punctelor raţionale din $[a,b]$ este numărabilă, rezultă că oricărei funcţii i se asociază o familie numărabilă de traiectorii monotone.

Analiza întreprinsă de Iosifescu arată că mulţimea neglijabilă Z din teorema sa de mai sus relativă la funcţii cu proprietatea lui Darboux se obţine ca reuniune a mulţimii E_f a punctelor de extremum strict ale lui f (mulţime care este totdeauna cel mult numărabilă) şi reuniunea numărabilă a mulţimilor $N_i (i = 1,2, \ldots)$ definite în modul următor: notînd cu $r_1, r_2, \ldots, r_i, \ldots$ şirul numerelor raţionale din $[a,b]$, N_i este mulţimea tuturor punctelor din $[a,b]$ în care cel puţin una dintre traiectoriile monotone asociate lui f în r_i nu admite derivată unică — finită sau infinită. Folosind mereu teorema lui Lebesgue asupra derivabilităţii funcţiilor monotone, rezultă că fiecare mulţime N_i este de măsură nulă, deci Z este de măsură nulă; avem $Z = E_f \cup N_1 \cup N_2 \cup \ldots \cup N_i \cup \ldots$. Mulţimea $f(E_f)$ este cel mult numărabilă, deoarece E_f este cel mult numărabilă. Fiecare dintre mulţimile N_i este reuniunea a patru mulţimi $N^+(i)$, $N_+(i)$, $N^-(i)$ şi $N_-(i)$, unde $N^+(i)$ este mulţimea punctelor în care traiectoria f^+ care trece prin r_i nu admite derivată unică, $N_+(i)$ este mulţimea punctelor în care traiectoria f_+ care trece prin r_i nu admite derivată unică, iar $N^-(i)$ şi $N_-(i)$ sînt mulţimile de acelaşi fel asociate traiectoriilor monotone f^- şi f_-. În virtutea lemei stabilite mai sus, mulţimile $f^+(N^+(i))$, $f_+(N_+(i))$,

$f^-(N^-(i))$ şi $f_-(N_-(i))$ sînt de măsură nulă pentru orice i. Notînd cu $M_i(f)$ reuniunea lor şi punînd $M(f) = \bigcup M_i(f)$ pentru i mergînd de la 1 la infinit vom observa că $M(f)$, ca reuniune numărabilă de mulţimi de măsură nulă, este tot o mulţime de măsură nulă.

Fie acum Z_1 acea parte din mulţimea Z care este formată din puncte care, în mulţimile lor de nivel, sînt puncte de prima specie. Spre deosebire de funcţiile continue (care nu-s constante în nici un interval), la care mulţimile de nivel, fiind mulţimi frontieră închise, conţin obligatoriu puncte de prima specie, la funcţii cu proprietatea lui Darboux această situaţie nu mai are loc; o mulţime de nivel poate să conţină sau nu puncte de prima specie, existînd chiar cazuri în care astfel de puncte lipsesc din orice mulţime de nivel. (Se ştie, de exemplu, că există funcţii care iau în orice interval orice valoare reală; astfel de funcţii au, evident, proprietatea lui Darboux, dar fiecare mulţime de nivel este peste tot densă pe R, deci nu conţine decît puncte de a doua specie.) *Vom arăta că* $f(Z_1)$ *este de măsură nulă*. În acest scop, va fi suficient să arătăm că $f(Z_1) \subseteq f(E_f) \cup M(f)$, deoarece am văzut că fiecare termen din membrul al doilea este o mulţime de măsură nulă. Fie deci o valoare t din $f(Z_1)$ care nu este în $f(E_f)$. În mulţimea de nivel t există deci un punct $x \in Z_1$, de prima specie. Să presupunem, pentru a fixa ideile, că x este un punct de prima specie la stînga, cu alte cuvinte, există un interval $[r_j, x]$ (r_j raţional) a cărui intersecţie cu mulţimea de nivel t este formată numai din punctul x. Rezultă de aici că

$$\sup_{y \in [r_j, x]} f(y) = \inf_{y \in [r_j, x]} f(y) = f(x),$$

cu alte cuvinte,

$$f_j^+(x) = f^j_+(x) = f(x) = t,$$

deci, ţinînd seama că $x \in Z_1 - E_f$, rezultă existenţa unui i pentru care $x \in N_i$, deci pentru care $f_j^+(x)$, adică t, aparţine lui $M_i(f)$, adică lui $M(f)$.

Acum, totul este pregătit pentru obţinerea rapidă a teoremei Stoilow-Iosifescu, deoarece Z este chiar mulţimea excepţională, neglijabilă, din teorema relativă la proprietatea (m). Fie o valoare t care nu aparţine mulţimii

Scanned with CamScanner

$A = f(Z_1)$. Dacă în mulţimea $L_t = \{x ; f(x) = t\}$ nu există nici un punct de prima specie, atunci ea nu ne interesează. Dacă un astfel de punct x există în L_t, el nu va putea aparţine lui Z, căci, în acest caz, el ar aparţine chiar lui Z_1, deci $f(x) = t$ ar aparţine lui $f(Z_1)$, contrar ipotezei. Rezultă că x este un punct de prima specie care lipseşte din Z. Însă în astfel de puncte este satisfăcută proprietatea (m) — unilaterală sau bilaterală (să nu uităm că funcţia f are proprietatea lui Darboux!) şi, conform teoremei relative la proprietatea (m), există un număr derivat — finit sau infinit — care este egal cu numărul derivat opus, iar dacă proprietatea (m) este satisfăcută bilateral — deci dacă punctul x este izolat în L_t — există derivată unică — finită sau infinită.

Extensiunea teoremei lui Stoilow la funcţii cu proprietatea lui Darboux este astfel complet stabilită. Trebuie să observăm că deducerea ei din lema privind funcţiile monotone şi din teorema relativă la proprietatea (m) a cerut un anumit efort, care nu este explicitat de către Iosifescu, dar al cărui rezultat a fost corect intuit de către acesta. Pentru multe funcţii cu proprietatea lui Darboux, extensiunea în discuţie este lipsită de obiect, deoarece funcţiile în cauză nu admit puncte de prima specie în mulţimile lor de nivel. Dar chiar dacă astfel de puncte există, numai dacă mulţimea valorilor luate în aceste puncte nu formează o mulţime de măsură nulă, extensiunea teoremei lui Stoilow devine efectiv aplicabilă. Iosifescu observă că această situaţie netrivială de aplicare a extensiunii teoremei lui Stoilow apare chiar la unele funcţii derivate. Ar fi interesant să se stabilească dacă există derivate ale lui Pompeiu sau ale lui Köpcke care să facă obiectul unei aplicări netriviale a acestei extensiuni.

Cele două teoreme privind transpunerea teoremei lui Stoilow la funcţii cu proprietatea lui Darboux se deosebesc prin poziţia mulţimii excepţionale: în domeniul de definiţie al funcţiei, în prima teoremă; în domeniul valorilor, în a doua. Dar ţinînd seama de faptul că mulţimea excepţională din a doua teoremă nu este decît imaginea, prin f, a mulţimii excepţionale din prima teoremă, obţinem un rezultat mai puternic, care cumulează cele două teoreme în discuţie:

Fiind dată o funcţie reală f cu proprietatea lui Darboux pe $[a,b]$, există o mulţime Z de măsură nulă în $[a,b]$, a cărei

imagine $f(Z)$ este de asemenea de măsură nulă, astfel încît în orice punct x care lipsește din Z sau pentru care $f(x)$ lipsește din $f(Z)$ are loc următoarea situație: Dacă x este de prima specie în mulțimea sa de nivel, atunci există în x un număr derivat — finit sau infinit — care este egal cu numărul derivat opus; dacă x este un punct izolat în mulțimea sa de nivel, există în x o derivată unică — finită sau infinită.

Există însă și o deosebire importantă între cazul în care mulțimea excepțională este plasată în intervalul de definiție și cazul în care această mulțime este plasată în intervalul valorilor funcției. În timp ce în primul caz are loc și o variantă „finită" (obținută prin ștergerea cuvintelor „sau infinit" din teorema inițială), în cazul al doilea această variantă „finită" nu este posibilă. Pentru a demonstra acest fapt, este suficient să considerăm o derivată Pompeiu mărginită, pentru care mulțimea zerourilor este de măsură strict pozitivă (pentru definiția derivatei lui Pompeiu și pentru posibilitatea ca zerourile ei să formeze o mulțime de măsură pozitivă, a se vedea capitolul relativ la Pompeiu).

Vom trece acum să culegem noi fructe ale teoremei lui Stoilow, lucru posibil datorită rezultatelor obținute de Iosifescu în lărgirea cadrului acestei teoreme. Vom urma, în esență, ideile lui Iosifescu („Revue de math. pures et appl.", 1959, no.3 și no.4).

Am semnalat mai sus că Stoilow a desprins, drept consecință a teoremei sale, teorema lui Denjoy din 1915, relativă la situația numerelor derivate ale unei funcții continue. Însă această teoremă a lui Denjoy a primit diferite extensiuni, care au culminat cu aceea dată de Saks pentru funcții arbitrare. Această extensiune, cunoscută sub numele de teorema lui Denjoy-Young-Saks, are enunțul următor: Fiind dată o funcție reală f definită pe $[a,b]$, există o mulțime E de măsură nulă, astfel încît, în orice x din $[a,b] - E$, două numere derivate opuse sînt sau simultan finite și egale, sau simultan infinite și inegale, numărul derivat superior fiind egal cu $+\infty$. Se știe că de aici (vezi vol. II din *Analiza matematică* de Miron Nicolescu, p.34 și cap.IX, Derivata) rezultă că în orice punct din $[a,b] - E$ două numere derivate asociate sînt sau diferite și atunci unul cel puțin este infinit sau egale și finite.

Pentru demonstrație, vom observa mai întîi că mulțimea punctelor în care o funcție f admite derivată unilaterală infinită este de măsură nulă. Într-adevăr, este suficient

Scanned with CamScanner

să observăm că, într-un punct în care f admite derivată unilaterală infinită, ea posedă proprietatea (m) cel puțin unilateral, rămînînd apoi să se aplice acea parte din teorema relativă la proprietatea (m) care se referă la mulțimea excepțională W.

Să notăm cu E_n mulțimea acelor puncte din $[a,b]$ în care un număr derivat al lui f, de exemplu D^+, este finit și inferior numărului natural n. Vom arăta că avem $D^+ = D_-$ aproape peste tot în E_n. Fie f_n dată de $f_n(x) = f(x) - nx$. Pentru $x \in E_n$, avem $D^+f_n(x) = D^+f(x) - n < 0$, deci f_n posedă proprietatea (m) cel puțin la dreapta lui x. Folosind din nou partea relativă la W din teorema despre proprietatea (m) (aici trebuie explicitată partea relativă la puncte cu proprietatea (m) unilaterală din demonstrația acestei teoreme), rezultă că avem aproape peste tot în E_n relația $D^+f_n(x) = D^-f_n(x)$, deci $D^+f(x) = D_-f(x)$. Pentru $n \to \infty$ se obține faptul că, exceptînd o mulțime de măsură nulă de puncte, un număr derivat finit este egal cu numărul derivat opus. De aici și din observația relativă la mulțimea punctelor în care o funcție admite derivată unilaterală infinită rezultă imediat teorema lui Denjoy-Young-Saks.

Prin eleganța și simplitatea ei, demonstrația dată de Iosifescu acestei teoreme merită să intre în orice manual de analiză matematică, cu atît mai mult cu cît trunchiul din care ea s-a desprins — teorema lui Stoilow — prezintă un interes în sine, ca matrice a unui mare număr de fapte matematice care, din păcate, nu-și mai găsesc loc în manualele universitare.

Vom trece acum la consecințele teoremei Stoilow-Iosifescu. Iată mai întîi două teoreme din tratatul clasic al lui Saks privind teoria integralei, care se regăsesc pe această cale:

A. Dacă E este o mulțime de măsură nulă din $[a,b]$ iar f admite în fiecare punct din E derivată finită, atunci $f(E)$ este de măsură nulă.

B. Dacă E este o mulțime din $[a,b]$, iar derivata lui f există și este egală cu zero în orice punct din E, atunci $f(E)$ este de măsură nulă.

Aceste rezultate sînt consecințe directe ale următoarei leme a lui Iosifescu: Dacă numerele derivate la dreapta ale unei funcții f sînt, în punctele unei mulțimi E, mărginite de o constantă M, atunci măsura exterioară a mulțimii

$f(E)$ nu întrece produsul dintre $2M$ și măsura exterioară a lui E.

Propoziția B de mai sus dă posibilitatea să se obțină, drept consecințe ale teoremei Stoilow-Iosifescu, următoarele două teoreme.

Teorema 1. *Fie f cu proprietatea lui Darboux pe $[a,b]$ și fie m și M marginile lui f pe $[a,b]$. Fie D mulțimea punctelor din $[a,b]$ în care f admite derivată unică — finită sau infinită. În aceste condiții, mulțimea $[m,M] - f(D)$ este de măsură nulă dacă și numai dacă pentru aproape orice t în $[m,M]$ mulțimea L_t de nivel t conține un punct izolat.*

Demonstrație. Suficiența condiției este o consecință directă a teoremei Stoilow-Iosifescu. Rămîne să stabilim necesitatea condiției. În acest scop, să presupunem, prin reducere la absurd, că există o mulțime E de măsură exterioară pozitivă, astfel încît pentru $t \in E$ nivelul L_t este dens în sine. Dacă într-un punct al unui astfel de nivel există derivata lui f, ea este obligatoriu egală cu zero și, în virtutea propoziției B de mai sus, ar trebui ca E să fie de măsură nulă, în contradicție cu ipoteza raționamentului prin reducere la absurd. Rezultă că există o parte $F \subseteq [m,M]$ de măsură exterioară pozitivă, astfel încît pentru orice t în F mulțimea de nivel L_t nu conține nici un punct de diferențiabilitate a lui f, ceea ce este iarăși contradictoriu.

Teorema 2. *Fie f cu proprietatea lui Darboux pe $[a,b]$. Pentru ca mulțimea valorilor pe care f le ia în punctele în care există derivată (finită sau infinită) să fie de măsură nulă este necesar și suficient ca pentru aproape orice t în $[m,M]$ mulțimea de nivel L_t să fie densă în sine.*

Demonstrație. Suficiența condiției rezultă din propoziția B de mai sus, dacă se ține seamă că într-un punct dintr-o mulțime de nivel densă în sine derivata — dacă există — — este obligatoriu nulă. Pentru a stabili necesitatea condiției, să observăm că, dacă ar exista o mulțime de măsură exterioară pozitivă de valori t pentru care L_t conține puncte izolate, atunci din teorema Stoilow-Iosifescu ar rezulta că, exceptînd o mulțime de măsură nulă de valori t, în toate aceste puncte izolate ar exista derivată unică, în contrast cu ipoteza că mulțimea valorilor în punctele cu derivată unică este de măsură nulă.

Scanned with CamScanner

Să observăm că partea din teorema 2 care se referă la necesitatea condiţiei generalizează teorema lui Minakshisundaram despre care am vorbit în prima parte a acestui capitol şi pe care am regăsit-o, la momentul respectiv, cu ajutorul teoremei lui Stoilow.

Din teorema lui Minakshisundaram rezultă că aproape toate mulţimile de nivel ale unei funcţii continue, dar nederivabile în nici un punct, sînt mulţimi perfecte. Iosifescu a pus problema existenţei unei funcţii continue neconstante, ale cărei mulţimi de nivel sînt, toate, perfecte. Răspunsul afirmativ la această problemă a fost dat de Paul Erdös.

Cu ajutorul teoremei 2 şi al propoziţiilor A şi B de mai sus, Iosifescu a mai stabilit şi următoarea teoremă, pe care o reproducem aici fără demonstraţie:

Fie f cu proprietatea lui Darboux pe $[a,b]$ şi fie m şi M marginile lui f pe $[a,b]$. Să presupunem că, exceptînd o mulţime de măsură nulă de valori t, fiecare mulţime de nivel L_t conţine un punct izolat. Să mai presupunem că valorile pe care f le ia în punctele în care derivata lui f există şi este infinită formează o mulţime a cărei complementară în raport cu $[m,M]$ nu este de măsură nulă. În aceste condiţii, punctele în care derivata lui f nu se anulează formează o mulţime de măsură strict pozitivă.

Se poate observa că în cazul particular al funcţiilor continue se regăseşte faptul, deja prezentat la începutul acestui capitol (tot ca o consecinţă a teoremei lui Stoilow), conform căruia proprietatea (N) a lui Luzin implică pozitivitatea măsurii mulţimii punctelor în care derivata există şi nu se anulează şi faptul că complementara mulţimii $f(D)$ este de măsură nulă.

Este interesant de observat că unele extensiuni prilejuite de teorema Stoilow-Iosifescu rămîn fără obiect. Aşa se întîmplă cu o parte din teorema lui Saks privind condiţia T_1 a lui Banach, teoremă pe care am obţinut-o ca o consecinţă a teoremei lui Stoilow. Cu aceeaşi demonstraţie, dar prevalîndu-ne de teorema Stoilow-Iosifescu, se obţine următorul rezultat: Pentru ca o funcţie cu proprietatea lui Darboux să îndeplinească condiţia T_1 este necesar ca valorile luate în punctele în care nu există derivată (finită sau infinită) să formeze o mulţime de măsură nulă. Progresul acestui rezultat în raport cu teorema lui Saks este real în măsura în care există funcţii discontinue care au proprietatea lui Darboux şi îndeplinesc condiţia T_1. Însă

astfel de funcţii nu pot exista, deoarece la o funcţie Darboux care admite discontinuităţi valorile luate de o infinitate de ori formează o mulţime care conţine un interval, fapt incompatibil cu proprietatea T_1.

Cel care a dus mai departe rezultatele noastre şi ale lui Iosifescu privind teorema lui Stoilow este matematicianul indian (actualmente lucrînd la Universitatea Alberta din Edmonton, Canada) Krishna Murari Garg („Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae", 1963). Vom expune, în cele ce urmează, ideile sale.

Fie f o funcţie reală definită în intervalul I. Să notăm cu $Y_\alpha(f)$ ($\alpha = i, d, p, f, \infty, e, u, c$) mulţimea valorilor $t \in f(I)$ pentru care mulţimile de nivel $L_t = \{x;\ x \in I, f(x) = t\}$ sînt izolate, respectiv dense în sine, perfecte, finite, infinite, numărabile, nenumărabile sau de puterea continuului. Garg arată mai întîi că există o mulţime $Y \subseteq f(I)$ astfel încît

$$\mu(f(I) - Y) = 0 \tag{1}$$

(unde prin μ am notat măsura Lebesgue) şi, pentru orice $t \in Y$, $f^{-1}(t)$ este nenumărabilă numai dacă conţine un punct în care

$$D^+f = D^-f = +\infty,\ D_+f = D_-f = -\infty \tag{2}$$

(prin D, cu exponenţii şi indicii respectivi, reprezentînd, ca de obicei, numerele derivate ale lui f).

Fie K mulţimea punctelor din I în care este satisfăcută relaţia (2). Avem $Y \cap Y_u(f) \subseteq f(K)$, deci $Y_u(f) - f(K) \subseteq$ $\subseteq f(I) - Y$. De aici, în baza relaţiei (1), se obţine

$$\mu(Y_u(f) - f(K)) = 0. \tag{3}$$

Am demonstrat astfel:

Teorema lui Garg pentru funcţii arbitrare. *Fie f o funcţie reală definită pe I şi fie K mulţimea punctelor în care au loc relaţiile* (2). *În aceste condiţii, mulţimea $Y_u(f) - f(K))$ este de măsură nulă.* (În cazul în care f este boreliană, mulţimea $Y_u(f)$ este analitică în sensul lui Luzin-Suslin, aşa cum rezultă dintr-o teoremă a lui S. Braun din „Fundamenta Mathematicae", 1933, deci măsurabilă Lebesgue şi obţinem că măsura lui $Y_u(f)$ nu întrece măsura interioară a lui $f(K)$).

Corolar 1. O funcţie reală f îndeplineşte condiţia T_2 a lui Banach dacă valorile pe care f le ia în punctele în care

numerele derivate superioare sînt egale cu $+\infty$, iar numerele derivate inferioare sînt egale cu $-\infty$ formează o mulţime de măsură nulă. (Amintim că o funcţie are proprietatea T_2 dacă valorile pe care ea le ia de o infinitate nenumărabilă de ori formează o mulţime de măsură nulă.)

Să presupunem acum că f satisface proprietatea lui Darboux pe I. Se poate arăta că există o mulţime $Y \subseteq f(I)$ cu proprietatea (1) şi astfel încît, pentru orice $t \in Y$, un punct x din $f^{-1}(t)$ este izolat dacă şi numai dacă f este derivabilă în x. Notînd, ca şi pînă acum, cu D mulţimea punctelor din I în care f are o derivată unică — finită sau infinită — şi punînd $N = I - D$, vom avea, pentru orice $t \in Y$:

(i) $f^{-1}(t)$ este izolată dacă şi numai dacă $f^{-1}(t) \in D$

şi

(ii) $f^{-1}(t)$ este densă în sine dacă şi numai dacă $f^{-1}(t) \subseteq N$.

Avem deci

$$Y \cap Y_i(f) = Y - f(N) \tag{4}$$

şi

$$Y \cap Y_d(f) = Y - f(D). \tag{5}$$

Deoarece o mulţime de nivel care nu este izolată este obligatoriu infinită, relaţia (4) implică incluziunea

$$Y \cap f(N) \subseteq Y_\infty(f). \tag{6}$$

Din relaţiile (1), (4), (5) şi (6) rezultă

Teorema lui Garg pentru funcţii cu proprietatea lui Darboux. *Fie f o funcţie reală cu proprietatea lui Darboux pe I. Avem*

$$Y_i(f) \sim f(I) - f(N) \tag{a}$$

$$Y_d(f) \sim f(I) - f(D) \tag{b}$$

şi

$$\mu(f(N) - Y_\infty(f)) = 0, \tag{c}$$

unde $A \sim B$ dacă $A = (B - E_1) \cup E_2$, E_1 şi E_2 fiind mulţimi de măsură nulă. (În cazul în care f este boreliană, mulţimea $Y_d(f)$ este analitică în sensul lui Luzin-Suslin,

Scanned with CamScanner

în virtutea unui rezultat al lui S. Braun, loc. cit., deci este măsurabilă Lebesgue. Rezultă de aici că $f(D)$ este măsurabilă, fiind similară mulţimii $f(I) - Y_d(f)$).

Din (*a*) se deduce:

Corolar 2. Valorile pe care o funcţie f cu proprietatea lui Darboux le ia în punctele în care nu are derivată (finită sau infinită) formează o mulţime de măsură nulă dacă şi numai dacă mulţimea de nivel t este izolată pentru aproape orice t din $f(I)$.

Din (*b*) se deduce:

Corolar 3. Valorile pe care o funcţie f cu proprietatea lui Darboux în I le ia în punctele în care există derivata f' (finită sau infinită) formează o mulţime de măsură nulă dacă şi numai dacă mulţimea de nivel t este densă în sine pentru aproape orice t din $f(I)$.

Rezultă de asemenea din (*b*) că mulţimea $f(I) - f(D)$ este de măsură nulă dacă şi numai dacă $Y_d(f)$ este de măsură nulă, cu alte cuvinte, dacă şi numai dacă aproape fiecare mulţime de nivel a lui f conţine un punct izolat. Avem deci:

Corolar 4. Fie f cu proprietatea lui Darboux pe I. Complementara mulţimii valorilor luate de f în punctele în care există f' (finită sau infinită) este de măsură nulă dacă şi numai dacă pentru aproape orice t din $f(I)$ mulţimea de nivel t conţine un punct izolat.

În cazul în care f satisface, în plus, condiţia T_1 a lui Banach, $Y_\infty(f)$ este de măsură nulă, deci, în baza proprietăţii (*c*), rezultă că $f(N)$ este de măsură nulă. Aşadar:

Corolar 5. O funcţie reală f cu proprietatea lui Darboux pe I îndeplineşte condiţia T_1 numai dacă valorile luate de f în punctele în care ea nu are derivată (finită sau infinită) formează o mulţime de măsură nulă.

Observăm că atît corolarul 3, cît şi corolarul 4 regăsesc rezultate ale lui Iosifescu relative la punctele izolate în mulţimile lor de nivel. Mai precis, corolarul 3 coincide cu teorema 2, iar corolarul 4 coincide cu teorema 1. În ceea ce priveşte corolarul 5, el coincide cu acel exemplu de extensiune pe care am calificat-o mai sus ca fiind lipsită de obiect.

Se pare însă că Garg nu a observat că singurul caz în care se poate realiza condiţia stipulată în enunţul corolarului 5 este acela în care funcţia considerată este con-

tinuă; dar în această formă rezultatul a fost deja obţinut din teorema lui Stoilow pentru funcţii continue.

Faptul remarcabil în punctul de vedere al lui Garg este plasarea unei părţi importante din teorema lui Stoilow în contextul unor fapte privind funcţiile *arbitrare*. Roadele se văd chiar în consecinţele acestui punct de vedere în cazul particular al funcţiilor continue, caz în care se obţine o teoremă care furnizează o informaţie foarte bogată în ceea ce priveşte măsura mulţimilor $Y_\infty(f)$. Mai întîi să observăm că din continuitatea lui f rezultă egalităţile

$$Y_i(f) = Y_f(f),\ Y_d(f) = Y_p(f),\ Y_u(f) = Y_c(f), \qquad (7)$$

deci este suficient să se considere mulţimile $Y_f(f)$, $Y_\infty(f)$, $Y_e(f)$, $Y_u(f)$ şi $Y_p(f)$. Se verifică uşor că, datorită continuităţii lui f, aceste mulţimi sînt măsurabile. Mai precis, are loc următoarea teoremă, pe care o reproducem fără demonstraţie:

Teorema lui Garg pentru funcţii continue. *Fie f continuă pe I. Cu notaţiile deja introduse, avem egalităţile:*

$$\mu(Y_f(f)) = \mu(f(I)) - \mu(f(N)),\quad \mu(Y_\infty(f)) = \mu(f(N)),$$
$$\mu(Y_p(f)) = \mu(f(I)) - \mu(f(D)),\quad \mu(Y_u(f)) \leqslant \mu_i(f(K))$$

şi

$$\mu(f(D) \cap f(N)) - \mu_i(f(D) \cap f(K)) \leqslant \mu(Y_e(f)) \leqslant \mu(f(D)) \cap f(N)).$$

(Prin μ_i şi μ_e am notat măsura interioară şi măsura exterioară.)

Printre numeroasele consecinţe ale acestei teoreme figurează şi următoarele rezultate pe care le-am obţinut, în prima parte a acestui capitol, cu ajutorul teoremei lui Stoilow:

Dacă f este continuă şi îndeplineşte condiţia T_2, atunci $\mu(f(D)) = \mu(f(I))$;

Dacă f este continuă şi îndeplineşte în I condiţia N a lui Luzin, atunci $\mu(f(D^*)) = \mu(f(I))$, unde D^* este mulţimea punctelor în care f admite derivată finită;

Dacă f este continuă pe I, iar valorile pe care f le ia în punctele în care există derivată (finită sau infinită) formează o mulţime de măsură nulă, atunci pentru aproape orice t din $f(I)$ mulţimea de nivel t este perfectă, rară şi nevidă.

*

Acesta este doar o parte din itinerariul teoremei lui Stoilow, o teoremă care peste treizeci de ani a trecut neobservată, dar ale cărei consecinţe impun prezenţa ei în orice expunere a teoriei moderne a derivării. Articole de sinteză ca cel al lui A. M. Bruckner şi J. G. Ceder din 1965, asupra proprietăţii lui Darboux (în „Sonderdruck aus Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung”) şi cel al lui A. M. Bruckner şi J. L. Leonard din 1966, asupra derivatelor (în „American Mathematical Monthly”, Part II) consemnează rezultatele lui Stoilow, *prin intermediul extensiunilor şi ameliorărilor obţinute de cei care au venit după Stoilow*. Dar, chiar prin acest fapt, numele lui Stoilow devine din ce în ce mai puţin asociat de nişte rezultate care, în ideea lor fundamentală, îi aparţin. Este de datoria istoriei ştiinţei de a-i restitui ce i se cuvine.

FLORIN VASILESCU

Cel pe care Georges Bouligand îl numise rege al potențialului, iar Lebesgue și Luzin îl citaseră în două monografii celebre (primul, în monografia sa asupra integrării, iar al doilea în monografia sa asupra mulțimilor analitice) a publicat în 1927, în „Bull. mathém. de la Société roumaine des Sciences," o notă căreia probabil nu i-a acordat o deosebită însemnătate și care multă vreme nu a atras atenția nimănui (această notă constituie singurul articol de cercetare pe care Florin Vasilescu l-a publicat în limba română; pe toate celelalte, după obiceiul timpului, le-a publicat în limba franceză și, cîteva, în engleză). Și totuși, această notă conținea un rezultat remarcabil, privind rolul proprietății de continuitate în structura funcțiilor reale arbitrare.

Pînă la Vasilescu, se cunoștea un singur rezultat de acest fel, datorit lui Henri Blumberg (rezultat la care ne referim și într-un alt capitol al acestei cărți) : Orice funcție reală definită pe $[a,b]$ admite o restricție continuă pe o mulțime peste tot densă în $[a,b]$. Rezultatul lui Blumberg arăta că, pînă la un anumit punct, proprietatea de continuitate este implicată în însăși noțiunea de funcție reală de o variabilă reală. Numeroși matematicieni au mers pe urmele acestui rezultat, căutînd să-i fixeze cadrul cel mai larg de valabilitate și, pe cît posibil, să-l amelioreze. O întrebare însă rămînea fără răspuns: Dacă, într-adevăr, proprietatea de continuitate este atît de intim implicată în structura oricărei funcții reale de o variabilă reală, de ce nu se face simțit acest fapt într-un mod mai direct, în posibilitatea de a aproxima funcțiile reale arbitrare cu ajutorul funcțiilor continue? De ce nu se obțin niște teoreme care, prin adoptarea unei convergențe adecvate și a unor mulțimi neglijabile corespunzătoare, să dea o

reprezentare a funcţiilor arbitrare ca limite de funcţii continue?

Teorema lui Vasilescu este, în ordine cronologică, prima teoremă care aduce un răspuns la întrebările de mai sus. Este remarcabil faptul că această teoremă conservă noţiunea clasică de convergenţă şi recurge la un tip de mulţime excepţională care face să intervină nemijlocit structura funcţiei care se aproximează: această mulţime excepţională, de puncte în care eventual nu are loc reprezentarea funcţiei date f ca limită de funcţii continue, este mulţimea punctelor de discontinuitate ale lui f. În acelaşi timp, teorema lui Vasilescu este primul rezultat obţinut de un matematician român, în ceea ce priveşte găsirea unor proprietăţi aparţinînd tuturor funcţiilor reale de o variabilă reală. Iată care este enunţul ei:

Fiind dată o funcţie reală f definită pe $[a,b]$, există un şir $\{f_n\}$ de funcţii continue pe $[a,b]$, astfel încît

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$$

pentru orice x din $[a,b]$ în care f este continuă.

La prima vedere, acest enunţ pare derutant, deoarece interesul ei este condiţionat de existenţa unor puncte de continuitate ale lui f (altfel, teorema ar fi lipsită de obiect), existenţă care, evident, nu este asigurată pentru orice funcţie reală de o variabilă reală. La această situaţie se mai adaugă şi faptul că demonstraţia dată de către Florin Vasilescu foloseşte unele noţiuni şi rezultate din teoria funcţiilor multiforme, teorie pe care chiar el a elaborat-o în teza sa susţinută la Paris în 1925. Deoarece în enunţul teoremei lui Vasilescu nu apare nici o referire la funcţii multiforme, reobţinerea acestei teoreme pe o cale directă, deci care să evite orice referire la funcţii multiforme, se impunea. Am propus această problemă tînărului şi talentatului matematician Ionel Ţevy. Acesta, nu numai că a reuşit să obţină o demonstraţie directă a rezultatului lui Florin Vasilescu, dar a identificat semnificaţia ei profundă, care rezultă din unele teoreme depinzînd de clasa boreliană n, teoreme faţă de care rezultatul lui Vasilescu constituie prima treaptă, aceea corespunzătoare lui $n = 0$. Am în vedere faptul că Ionel Ţevy a reuşit să rezolve şi o altă problemă pe care i-am propus-o, aceea de a găsi corespondentul teoremei lui Vasilescu la funcţii boreliene, la funcţii măsurabile şi la funcţii cu proprietatea lui Baire

Scanned with CamScanner

Înainte de a expune ideile lui Ionel Țevy, idei care dau teoremei lui Vasilescu întreaga amploare pe care aceasta o merita, prin dezvăluirea faptului că ea ascunde o clasă de fenomene legate de aproximarea unei funcții prin funcții mai particulare, vom evoca unele fapte matematice din deceniul al treilea al secolului nostru, fapte corelate într-un fel oarecare cu teorema în discuție.

Perioada la care ne referim a adus în atenția lumii matematice cîteva rezultate care dezvăluiau cît de intim este implicată proprietatea de continuitate în structura unei funcții reale arbitrare, de o variabilă reală. După cum am arătat mai sus, primul rezultat de acest fel a fost obținut de Blumberg (în 1922, într-un articol publicat în „Transactions of the American Mathematical Society"). Mult mai tîrziu, în 1944 (în „Duke Mathematical Journal"), Blumberg a reușit să arate că orice transformare a spațiului euclidian m-dimensional în spațiul euclidian n-dimensional admite o restricție continuă pe o mulțime densă, iar alți autori, ca C. Goffman, au extins teorema la anumite clase de spații metrice. Devenea astfel clar, cum era dealtfel de așteptat, că teorema lui Blumberg nu este specifică dreptei reale. Teorema lui Vasilescu inaugurează un alt ciclu de rezultate, în cadrul cărora procesul de trecere la limită pune în legătură funcțiile arbitrare cu cele continue. Dacă la Vasilescu teritoriul de desfășurare a acestui proces este dreapta numerică, ulterior, după cum vom vedea, și aici cadrul a fost extins, căpătînd chiar o generalitate mai mare decît în cazul teoremei lui Blumberg. Este, poate, interesant să semnalăm că la un an după publicarea teoremei lui Vasilescu, teoremă rămasă multă vreme necunoscută lumii matematice, marele matematician polonez Waclaw Sierpiński a publicat (în periodicul polonez „Fundamenta Mathematicae") o nouă teoremă de aproximare a funcțiilor reale arbitrare, de o variabilă reală, prin funcții continue (de fapt, chiar prin polinoame; dar datorită teoremei lui Weierstrass, orice teoremă de aproximare prin funcții continue devine, în mod automat, și o teoremă de aproximare prin polinoame). Iată enunțul ei: Fiind date o funcție reală f definită pe $[a,b]$ și un număr pozitiv ε, există un polinom $P(x)$ și o mulțime $E \subset [a,b]$, de măsură interioară Lebesgue mai mică decît ε, astfel încît, pentru orice $x \in [a,b] - E$, avem $|f(x) - P(x)| < \varepsilon$. Tot în 1928, Saks și Sierpiński arată (în „Fundamenta

Mathematicae") că orice funcție reală f pe $[a,b]$ poate fi aproximată oricît de bine cu o funcție φ de a doua clasă Baire, dacă sacrificăm o mulțime de măsură interioară egală cu zero. Cu alte cuvinte, fiind dat $\varepsilon > 0$, există o mulțime F de măsură interioară egală cu zero, astfel încît, pentru orice x din $[a,b] - F$ avem $|f(x) - \varphi(x)| < \varepsilon$. Micșorînd deci pretențiile asupra funcțiilor aproximante — — cerîndu-le să fie nu chiar polinoame, ci doar funcții de a doua clasă Baire, — mulțimea de sacrificiu se restrînge de la una de măsură interioară inferioară unui număr pozitiv dat la o mulțime de măsură interioară nulă. Desigur că aceste teoreme se lasă mai greu extinse într-un cadru mai general, deoarece ele sînt legate de entități foarte speciale, ca aceea de polinom și aceea de măsură interioară. Dar în condițiile diferitelor extensiuni pe care aceste entități le-au căpătat în matematica ultimelor decenii s-ar putea încerca o lărgire a cadrului de valabilitate al teoremelor lui Sierpiński și Saks-Sierpiński și o punere în legătură a acestor teoreme cu teorema lui Vasilescu (cel puțin pentru dreapta numerică).

Să revenim acum la rezultatul lui Vasilescu și să urmărim firul considerațiilor care l-au condus pe Țevy la faptele despre care am vorbit mai sus.

Fie X un spațiu metric separabil și Y un spațiu metric separabil complet. Fie o funcție $f: X \to Y$. Se spune că f este boreliană de clasă α în punctul x_0 din X dacă, pentru orice vecinătate deschisă V a lui $f(x_0)$, $f^{-1}(V)$ este o mulțime boreliană de clasă aditivă α în x_0, adică există o vecinătate U a lui x_0 astfel încît $U \cap f^{-1}(V)$ să fie o mulțime de clasă aditivă α în X. Pentru $\alpha = 0$ se regăsește definiția continuității în x_0.

Propoziția 1. Funcția $f: X \to Y$ este de clasă boreliană α dacă și numai dacă ea este de clasă α în orice punct din X.

Demonstrație. Necesitatea fiind evidentă, vom stabili suficiența condiției. Fie G o mulțime deschisă în Y. Deoarece f este de clasă α în orice punct din X, $f^{-1}(G)$ este boreliană, de clasă aditivă α, în orice punct din $f^{-1}(G)$, fapt care, în virtutea unui rezultat cunoscut (C. Kuratowski, *Topologie,* vol.I, Warszawa, 1958, p.264), garantează că $f^{-1}(G)$ este de clasă α aditivă, deci că f este de clasă α.

Scanned with CamScanner

Să notăm cu B_α mulţimea punctelor din X în care f este de clasă α.

Propoziţia 2. Restricţia aplicaţiei f la mulţimea $B_\alpha(f)$ este o funcţie boreliană de clasă α.

Demonstraţie. Să observăm mai întîi că în topologia indusă $B_\alpha(f)$ este un spaţiu separabil. Fie acum o mulţime G deschisă în Y. Pentru a arăta că $f^{-1}(G) \cap B_\alpha(f)$ este o mulţime boreliană de clasă α aditivă în $B_\alpha(f)$, să considerăm un element x din $f^{-1}(G) \cap B_\alpha(f)$. Deoarece f este de clasă α în x, există o vecinătate deschisă V a lui x pentru care mulţimea $V \cap f^{-1}(G)$ este de clasă aditivă α în X. Rezultă că

$$(V \cap B_\alpha(f)) \cap f^{-1}(G) = (V \cap f^{-1}(G)) \cap B_\alpha(f).$$

Deoarece $V \cap B_\alpha(f)$ este o vecinătate a lui x în $B_\alpha(f)$, iar membrul al doilea al egalităţii este o mulţime de clasă aditivă α în $B_\alpha(f)$, rezultă că mulţimea $f^{-1}(G) \cap B_\alpha(f)$ este de clasă aditivă α relativ la $B_\alpha(f)$, în toate punctele sale şi, deoarece $B_\alpha(f)$ este un spaţiu separabil, rezultă, în baza unei propoziţii deja utilizate din tratatul de topologie al lui Kuratowski, că $f^{-1}(G) \cap B_\alpha(f)$ este o mulţime de clasă aditivă α în $B_\alpha(f)$. Propoziţia 2 este astfel demonstrată.

Cu aceste preparative, putem prezenta generalizarea dată de Ţevy teoremei lui Vasilescu, generalizare care în acelaşi timp constituie o redemonstrare a ei fără utilizarea funcţiilor multiforme şi o precizare remarcabilă a semnificaţiei acestei teoreme.

Teorema Vasilescu-Ţevy. *Fie X un spaţiu metric separabil, iar Y un spaţiu metric separabil complet. Fie o funcţie $f: X \to Y$. Pentru orice număr ordinal $\alpha > 0$ există un şir $\{f_n\}$ de funcţii boreliene de clasă $\leqslant \alpha$ care converge către f în orice punct din $B_\alpha(f)$.*

Dacă $Y = R^n$ sau dacă dimensiunea topologică a lui X este egală cu zero, teorema în discuţie este adevărată şi pentru $\alpha = 0$.

Demonstraţie. Deoarece, conform Propoziţiei 2, restricţia funcţiei f la mulţimea $B_\alpha(f)$ este o funcţie de clasă α, putem aplica aici o cunoscută teoremă de prelungire a funcţiilor

boreliene (C. Kuratowski, loc. cit., p.342), conform căreia dacă X este un spaţiu metric, Y un spaţiu metric separabil şi complet, iar B o parte a lui X, atunci orice funcţie definită pe B şi de clasă boreliană α se poate prelungi pe întregul spaţiu X, la o funcţie de clasă boreliană $\alpha + 1$. Să luăm, în rolul lui B, mulţimea $B_\alpha(f)$. Rezultă existenţa unei funcţii $g: X \to Y$ de clasă $\alpha + 1$, care coincide cu f în orice punct din $B_\alpha(f)$. Pentru $\alpha > 0$ avem $\alpha + 1 > 1$, iar funcţia g este limita unui şir $\{f_n\}$ de funcţii de clasă $\leqslant \alpha$.

În cazurile particulare menţionate în enunţ (adică $Y = R$ şi dim.$X = 0$), teorema are loc şi pentru $\alpha = 0$, deoarece în acest caz funcţiile de prima clasă boreliană coincid cu funcţiile de prima clasă Baire. Pentru $X = Y = R$, regăsim teorema lui Vasilescu.

Sîntem acum în măsură să înlăturăm o anumită suspiciune care plana asupra teoremei lui Vasilescu, aceea constînd în faptul că ea s-ar referi numai în aparenţă la *orice* funcţie, fiind lipsită de obiect în cazul în care funcţia nu admite puncte de continuitate (şi, adăugăm acum, fiind trivială în cazul în care mulţimea punctelor de continuitate nu este suficient de consistentă; de exemplu, cînd este finită). În acest scop, vom reface raţionamentul precedent, în cazul particular $X = Y = R$, luînd în rolul submulţimii B din teorema de prelungire o parte densă a lui X, cu proprietatea că restricţia funcţiei considerate la această parte densă, fie ea A, este continuă. Existenţa unei mulţimi A cu aceste proprietăţi rezultă din aceeaşi teoremă a lui Blumberg din 1922, despre care a mai fost vorba mai sus. Din continuitatea funcţiei f/A rezultă că f este de clasă boreliană zero pe A, deci se poate prelungi pe tot spaţiul R la o funcţie g de prima clasă Baire. Rezultă existenţa unui şir $\{f_n\}$ de funcţii continue pe R, care tinde către g în orice punct din R. Însă g coincide cu f pe A, deci şirul f_n tinde către f în orice punct din A. Aşadar, are loc următorul rezultat pe care în mod firesc îl vom atribui tuturor celor trei autori de la care au fost împrumutate unele idei:

Teorema Blumberg-Vasilescu-Ţevy. *Fiind dată o funcţie reală f definită în R, există un şir $\{f_n\}$ de funcţii continue în R, care converge către f pe o mulţime densă în R.*

După cum rezultă din demonstraţie, *punctele în care $\{f_n\}$ converge către f sînt punctele de continuitate ale restricţiei*

boreliene (C. Kuratowski, loc. cit., p.342), conform căreia dacă X este un spaţiu metric, Y un spaţiu metric separabil şi complet, iar B o parte a lui X, atunci orice funcţie definită pe B şi de clasă boreliană α se poate prelungi pe întregul spaţiu X, la o funcţie de clasă boreliană $\alpha + 1$. Să luăm, în rolul lui B, mulţimea $B_\alpha(f)$. Rezultă existenţa unei funcţii $g: X \to Y$ de clasă $\alpha + 1$, care coincide cu f în orice punct din $B_\alpha(f)$. Pentru $\alpha > 0$ avem $\alpha + 1 > 1$, iar funcţia g este limita unui şir $\{f_n\}$ de funcţii de clasă $\leqslant \alpha$.

În cazurile particulare menţionate în enunţ (adică $Y = R$ şi dim.$X = 0$), teorema are loc şi pentru $\alpha = 0$, deoarece în acest caz funcţiile de prima clasă boreliană coincid cu funcţiile de prima clasă Baire. Pentru $X = Y = R$, regăsim teorema lui Vasilescu.

Sîntem acum în măsură să înlăturăm o anumită suspiciune care plana asupra teoremei lui Vasilescu, aceea constînd în faptul că ea s-ar referi numai în aparenţă la *orice* funcţie, fiind lipsită de obiect în cazul în care funcţia nu admite puncte de continuitate (şi, adăugăm acum, fiind trivială în cazul în care mulţimea punctelor de continuitate nu este suficient de consistentă; de exemplu, cînd este finită). În acest scop, vom reface raţionamentul precedent, în cazul particular $X = Y = R$, luînd în rolul submulţimii B din teorema de prelungire o parte densă a lui X, cu proprietatea că restricţia funcţiei considerate la această parte densă, fie ea A, este continuă. Existenţa unei mulţimi A cu aceste proprietăţi rezultă din aceeaşi teoremă a lui Blumberg din 1922, despre care a mai fost vorba mai sus. Din continuitatea funcţiei f/A rezultă că f este de clasă boreliană zero pe A, deci se poate prelungi pe tot spaţiul R la o funcţie g de prima clasă Baire. Rezultă existenţa unui şir $\{f_n\}$ de funcţii continue pe R, care tinde către g în orice punct din R. Însă g coincide cu f pe A, deci şirul f_n tinde către f în orice punct din A. Aşadar, are loc următorul rezultat pe care în mod firesc îl vom atribui tuturor celor trei autori de la care au fost împrumutate unele idei:

Teorema Blumberg-Vasilescu-Ţevy. *Fiind dată o funcţie reală f definită în R, există un şir $\{f_n\}$ de funcţii continue în R, care converge către f pe o mulţime densă în R.*

După cum rezultă din demonstraţie, *punctele în care $\{f_n\}$ converge către f sînt punctele de continuitate ale restricţiei*

lui f la A; deci varianta Blumberg-Vasilescu-Ţevy ameliorează varianta iniţială a lui Vasilescu, în ceea ce priveşte informaţia pe care o furnizează asupra mulţimii punctelor de convergenţă a şirului $\{f_n\}$ către f, salvînd în acelaşi timp şi o bună parte din proprietatea de continuitate a lui f în punctele de convergenţă, în sensul că relativizează această proprietate la mulţimea densă A.

Teorema Blumberg-Vasilescu-Ţevy poate fi uşor extinsă, în funcţie de extensiunile care s-au dat teoremei lui Blumberg. După cum am semnalat, chiar Blumberg şi-a extins teorema în 1944 la aplicaţii ale spaţiului euclidian m-dimensional în spaţiul euclidian n-dimensional (m şi n numere naturale arbitrare), deci: *Fiind dată o funcţie* $f: R^m \rightarrow R^n$, *există un şir* $\{f_n\}$ *de funcţii continue în* R^m, *care converge către* f *pe o mulţime densă în* R^m.

O variantă mai generală, pentru spaţii metrice separabile, se poate obţine din extensiunea teoremei lui Blumberg la astfel de spaţii.

Din păcate, mulţimea densă A nu poate fi totdeauna aleasă în aşa fel încît să fie nenumărabilă. W. Sierpiński a arătat încă în 1910 (în „Bulletin de l'Académie des Sciences de Cracovie") că, dacă admitem ipoteza continuului, atunci există o funcţie care nu admite restricţie continuă pe nici o mulţime nenumărabilă. Deci, atîta vreme cît demersul nostru trece prin teorema lui Blumberg, nu putem găsi totdeauna un şir $\{f_n\}$ de funcţii continue, care să conveargă către f pe o mulţime nenumărabilă. Aceasta este una din limitările impuse teoremei lui Vasilescu de abordarea ei cu ajutorul teoremei lui Blumberg. Rămîne ca un exemplu — eventual chiar cel folosit de Sierpiński — să stabilească dacă este vorba aici de o infirmitate a instrumentului folosit sau de o limitare care ţine de natura lucrurilor. O altă limitare se referă la imaginea mulţimii A de convergenţă a şirului $\{f_n\}$ către f. O întrebare legitimă ne invită să răspundem dacă nu cumva nu numai A, dar şi imaginea ei prin f este o mulţime densă (de astă dată, în intervalul lui f, dacă ne referim la cazul $X = Y = R$). Răspunsul negativ la această întrebare este sugerat (dar rămîne ca el să fie şi confirmat) de răspunsul negativ la o întrebare corespunzătoare în ceea ce priveşte teorema lui Blumberg. Într-adevăr, C. J. Neugebauer a arătat (în 1962, în „Mathematische Zeitschrift") că, în teorema lui Blumberg, mulţimea $f(A)$ este densă în intervalul valorilor

Scanned with CamScanner

lui f dacă și numai dacă f este cvasicontinuă, în sensul lui Kempisty („Fundamenta Mathematicae", 1932). Dar nu orice funcție reală este cvasicontinuă.

Față de aceste limitări probabile ale teoremei lui Vasilescu, rămîne să ne îndreptăm atenția în alte direcții în care am putea obține alternative interesante față de varianta inițială a lui Vasilescu sau față de varianta Vasilescu-Țevy. Ținînd seama de legătura strînsă dintre funcțiile continue și cele măsurabile (prin teorema lui Luzin) și de legătura corespunzătoare dintre funcțiile continue și cele cu proprietatea lui Baire, Ionel Țevy a reușit să obțină două variante noi ale teoremei lui Vasilescu, variante pe care le vom prezenta în cele ce urmează, urmîndu-l pe Ionel Țevy („Studii și cercetări matematice", 1969; „Revue roumaine de mathématiques pures et appl., 1972).

Fie un spațiu amorf T și o σ-algebră $\mathcal{C}$ de părți ale lui T. Să notăm cu $\mathcal{C}_A$ urma lui $\mathcal{C}$ pe o submulțime $A \subseteq T$; cu alte cuvinte, $\mathcal{C}_A$ este familia mulțimilor de forma $C \cap A$, unde C parcurge pe $\mathcal{C}$. Vom reproduce, fără demonstrație

Lema 1. Fiind dată o mulțime $A \subseteq T$ și un sistem de mulțimi $B_{i_1 \dots i_n}$ din $\mathcal{C}_A$, astfel încît

$$B_{i_1 \dots i_n} \cap B_{j_1 \dots j_k} = 0 \text{ pentru } (i_1 \dots i_n) \neq (j_1 \dots j_k), \quad k \leqslant n,$$

există un sistem de mulțimi $C_{i_1 \dots i_n}$ din $\mathcal{C}_{A_n}$, unde

$$A_n = \bigcup C_{i_1 \dots i_n},$$

reuniunea fiind extinsă la toate sistemele de n indici, astfel încît:

1° $A_n \in \mathcal{C}$,

2° $A \cap C_{i_1 \dots i_n} = B_{i_1 \dots i_n}$,

3° $C_{i_1 \dots i_n} \cap C_{j_1 \dots j_k} = 0$ pentru $(i_1 \dots i_n) \neq (j_1 \dots j_k)$, $k \leqslant n$,

4° $C_{i_1 \dots i_n} = 0$ dacă $B_{i_1 \dots i_n} = 0$.

În particular, mulțimile $C_{i_1 \dots i_n}$ sînt din $\mathcal{C}$.

Cu ajutorul acestei leme se demonstrează următoarea propoziție:

Fie T un spațiu amorf, Y un spațiu metric separabil complet și $A \subseteq T$. Orice funcție $f: A \to Y$, $\mathcal{C}$-măsurabilă relativ la A poate fi prelungită, pe o mulțime A^* din $\mathcal{C}$, la o funcție f^*, $\mathcal{C}$-măsurabilă relativ la A^*.

Pentru demonstrație, să observăm că măsurabilitatea lui f relativ la A implică existența unui șir $\{f_n\}$ de funcții $\mathcal{C}$-etajate relativ la A, șir care converge către f. Avem deci $d(f_n(x), f_n(x)) < \varepsilon$ pentru $N(x,\varepsilon) < k \leqslant n$ și $f_n(A) = \{y_n^1, y_n^2, \ldots, y_n^i, \ldots\}$.

Să punem

$$B_{i_1 \ldots, i_n} = f_1^{-1}(y_1^{i_1}) \cap \cdots \cap f_n^{-1}(y_n^{i_n}).$$

Aceste mulțimi sînt din $\mathcal{C}_A$ și ipotezele lemei precedente sînt verificate. Deci, pentru orice n, există mulțimile A_n și $C_{i_1 \ldots i_n}$ din $\mathcal{C}$, cu proprietățile $1^0 - 4^0$ din enunțul lemei.

Fie acum mulțimea

$$A^* = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n.$$

Evident, $A^* \in \mathcal{C}$. Putem prelungi fiecare f_n pe A_n, punînd $f_n^*(x) = y_n^{i_n}$ dacă $x \in C_{i_1 \ldots i_n}$. Mulțimea valorilor funcție astfel definite este cel mult numărabilă, iar f_n^* este $\mathcal{C}$-măsurabilă în raport cu A_n, deoarece $(f_n^*)^{-1}(y_n^i) = \bigcup C_{i_1 \ldots i_{n-1}}$, reuniunea fiind extinsă la toate sistemele de $n-1$ indici.

Vom arăta că șirul $\{f_n^*\}$ de funcții astfel obținute converge pe A^*.

Fie $x_0 \in A^*$; deci $x_0 \in C_{i_1 \ldots i_n}$. Dacă $x_0 \in C_{j_1 \ldots j_k}$, cu $k \leqslant n$, atunci, după 1^0, $i_1 = j_1, \ldots, i_k = j_k$. Fie $x \in B_{i_1 \ldots i_n}$; atunci $f_n^*(x) = y_n^{i_n} = f_n^*(x_0) = f_n(x)$. Deoarece $i_k = j_k$, rezultă că $f_k^*(x) = y_k^{i_k} = f_k^*(x_0) = f_k(x)$ și deci $d(f_n^*(x_0), f_k^*(x_0)) = d(f_n(x), f_k(x)) < \varepsilon$ pentru $N(x,\varepsilon) < k \leqslant n$, deoarece $x \in A$. Rezultă că $\{f_n^*(x_0)\}$ este un șir Cauchy în Y, deci un șir convergent.

Funcția

$$f^*(x) = \lim_{n \to \infty} f_n^*(x) \text{ pentru orice } x \in A^*$$

este $\mathcal{C}$-măsurabilă în raport cu A^* (deoarece este limită de funcții măsurabile) și prelungește pe f, răspunzînd în întregime enunțului propoziției.

Scanned with CamScanner

B.C.U. „M. EMINESCU" IAȘI

Să observăm că, de fapt, funcția f se prelungește chiar la o funcție $\mathcal{C}$-măsurabilă pe T. Într-adevăr, deoarece $A^* \in \mathcal{C}$, funcția F constantă pe complementara lui A^* și egală cu f^* pe A^* este $\mathcal{C}$-măsurabilă.

Revenind la spațiile metrice X și Y, să considerăm în X un σ-ideal $\mathfrak{N}$ ce generează topologia $T(\mathfrak{N})$ și σ-algebra $\mathcal{A}(\mathfrak{N})$.

Funcția $f:X \to Y$ este $\mathcal{A}(\mathfrak{N})$-măsurabilă dacă pentru orice mulțime deschisă $N \subseteq Y$ avem $f^{-1}(N) \in \mathcal{A}(\mathfrak{N})$.

Lema 2. Fie o funcție $f:X \to Y$ și fie $T(f)$ mulțimea punctelor în care f este $T(\mathfrak{N})$-continuă. Atunci există o funcție $\widehat{f}:X \to Y$, $\mathcal{A}(\mathfrak{N})$-măsurabilă, care coincide cu f pe $T(f)$.

Demonstrație. Deoarece restricția oricărei funcții la mulțimea punctelor sale de continuitate este continuă pe această mulțime, rezultă că pentru orice mulțime deschisă $H \subseteq Y$ avem $g^{-1}(H) = G_T \cap T(f)$, unde g este restricția lui f la $T(f)$, iar G_T este o mulțime $T(\mathfrak{N})$-deschisă. Însă $G_T \in \mathcal{A}(\mathfrak{N})$ și deci g este o funcție $\mathcal{A}(\mathfrak{N})$-măsurabilă în raport cu $T(f)$. Aplicînd observația făcută după demonstrarea propoziției precedente, obținem funcția $\widehat{f}$ cu proprietățile din enunț.

Vom da acum o *variantă măsurabilă a teoremei lui Vasilescu* (O numim așa, deoarece cazul particular cel mai important de σ-ideal $\mathfrak{N}$ este cel al mulțimilor de măsură nulă; în acest caz, luînd $X = R^m$, teorema care urmează se obține din binecunoscuta teoremă a lui Luzin, privind restricțiile continue ale funcțiilor măsurabile. Dar tot atît de bine am putea lua în rolul lui $\mathfrak{N}$ σ-idealul mulțimilor de prima categorie Baire. În acest caz, teorema care urmează se obține din teorema cunoscută în topologia generală, privind restricțiile continue ale funcțiilor cu proprietatea lui Baire):

Fiind dată o funcție $f:X \to R^n$, există o mulțime $N \in \mathfrak{N}$ și un șir de funcții $f_n:(X - N) \to R^n$, continue pe $X - N$, care converge către f în orice punct din $(X - N) \cap T(f)$.

Într-adevăr, Ionel Țevy a stabilit în teza sa că dacă σ-idealul $\mathfrak{N}$ generează o σ-algebră, atunci, notînd această σ-algebră prin $\mathcal{A}_+(\mathfrak{N})$, $\mathcal{A}_\times(\mathfrak{N})$, $\mathcal{A}_B(\mathfrak{N})$ după cum ea este, respectiv, de tip aditiv, de tip multiplicativ sau de tip Baire, are loc următoarea teoremă:

a) Pentru ca o funcție $f:X \to Y$ să fie $\mathcal{A}_B(\mathfrak{N})$-măsurabilă este necesar și suficient să existe o mulțime $M \in \mathfrak{N}$ astfel încît restricția lui f la $X - M$ să fie continuă; b) Condiția necesară și suficientă ca $f:X \to Y$ să fie o funcție $\mathcal{A}_+(\mathfrak{N})$-măsurabilă sau $\mathcal{A}_\times(\mathfrak{N})$-măsurabilă este existența unei mulțimi $N \in \mathfrak{N}$ astfel încît restricția lui f la $X - N$ să fie o funcție boreliană de clasă 1 relativ la $X - N$.

Din această teoremă rezultă existența unei mulțimi $N \in \mathfrak{N}$ pentru care funcția f dată prin lema 2 este continuă sau de prima clasă pe $X - N$. Rezultă că restricția lui $\hat{f}$ la $X - N$ este, pe $X - N$, limita unui șir de funcții continue pe această mulțime.

Varianta „măsurabilă" a teoremei lui Vasilescu admite următoarea precizare:

Dacă σ-algebra $\mathcal{A}(\mathfrak{N})$ este de tip Baire sau de tip multiplicativ, atunci funcțiile continue f_n pot fi definite pe întreg spațiul X, însă convergența are loc de asemenea cu excepția unei mulțimi din $\mathfrak{N}$.

Pentru stabilirea acestui rezultat suplimentar se folosește faptul că orice funcție $\mathcal{A}_B(\mathfrak{N})$-măsurabilă sau $\mathcal{A}_\times(\mathfrak{N})$-măsurabilă coincide, neglijînd mulțimi din $\mathfrak{N}$, cu o funcție boreliană de prima clasă. Există deci o mulțime $N \in \mathfrak{N}$ și o funcție $g:X \to R^n$ de prima clasă, astfel încît $f = g$ pe $X - N$ și se obține astfel precizarea menționată.

Rezultate similare se obțin și în cazul funcțiilor aproximativ continue, deși topologia densității nu este generată de un ideal de mulțimi.

Fie o aplicație $f:R^n \to R$ și fie $A_p(f)$ mulțimea punctelor din R^n în care f este aproximativ continuă. Deoarece în topologia densității mulțimile boreliene coincid cu mulțimile măsurabile Lebesgue, rezultă, ca și în lema 2, că există o funcție măsurabilă g care coincide cu f pe $A_p(f)$. Rezultă deci că *orice funcție $f:R^n \to R$ coincide pe mulțimea $A_p(f)$ cu o funcție aproximativ continuă aproape peste tot.*

Mai important este însă să dăm, după Țevy, o *variantă «aproximativ-continuă» a teoremei lui Vasilescu*:

Fiind dată funcția $f:R^m \to R$, există un șir $\{f_n\}$ de funcții continue pe R^m, care converge către f aproape peste tot pe mulțimea $A_p(f)$.

Pentru demonstrație, să considerăm funcția măsurabilă g de mai sus. În baza teoremei lui Luzin, privind aproximarea funcțiilor măsurabile prin funcții continue, există un

şir monoton ascendent $\{F_n\}$ de mulţimi închise, astfel încît măsura complementarei lui F_n să fie inferioară lui $1/n$, iar g să fie continuă pe fiecare mulţime F_n. Vom prelungi prin continuitate restricţia lui g la F_n de la mulţimea F_n la întregul spaţiu R^n. Notînd cu f_n această prelungire, obţinem un şir $\{f_n\}$ de funcţii continue pe R^n, care converge către g în orice punct din mulţimea $F = \bigcup F_n$. Însă măsura complementarei lui F este egală cu zero, deci şirul $\{f_n\}$ converge către g aproape peste tot, adică $\{f_n\}$ converge către f aproape peste tot pe $A_p(f)$.

Să observăm că, chiar din demonstraţia de mai sus, rezultă următoarea *variantă a teoremei lui Vasilescu pentru funcţii măsurabile Lebesgue:*

Fiind dată funcţia măsurabilă Lebesgue $f:R^m \to R$, există un şir $\{f_n\}$ de funcţii continue pe R^m, care converge către f aproape peste tot. De aici, folosind teorema lui Weierstrass de aproximare a funcţiilor continue prin polinoame, rezultă: *Orice funcţie măsurabilă $f:R^m \to R$ este, aproape peste tot, limita unui şir de polinoame.* Regăsim astfel un vechi rezultat al lui Maurice Fréchet, din 1905, rezultat precizat de Sierpiński în 1922 (în „Fundamenta Mathematicae"): Orice funcţie măsurabilă $f:R^m \to R$ este, aproape peste tot, suma unei serii absolut convergente de polinoame.

Tot aşa, folosind existenţa, pentru funcţiile cu proprietatea lui Baire, a unei restricţii continue pe un rezidual, obţinem următoarea variantă a teoremei lui Vasilescu pentru funcţii cu proprietatea lui Baire:

Orice funcţie cu proprietatea lui Baire $f:X \to R^n$, unde X este un spaţiu metric separabil, este, pe complementara unei anumite mulţimi de prima categorie din X, limita unui şir de funcţii continue (*şi*, pentru $X = R$, *chiar de polinoame*).

Într-adevăr, din faptul că spaţiul metric X este separabil rezultă existenţa unei mulţimi A de prima categorie, astfel încît restricţia lui f la $X - A$ să fie continuă. Din completitudinea lui R^n rezultă existenţa unei funcţii g de prima clasă Baire pe X, care coincide cu f pe $X - A$. Funcţia g este, pe X, limita unui şir de funcţii continue (valorile lui g fiind în R^n), deci f este, pe $X - A$, limita unui şir de funcţii continue. În virtutea teoremei lui Weierstrass, f este, pe $X - A$, chiar limita unui şir de polinoame.

După cum se poate observa uşor, nici varianta „măsurabilă", nici varianta „aproximativ continuă" a teoremei

lui Vasilescu nu este nici mai generală, nici mai particulară decît variantele precedente ale teoremei lui Vasilescu. Aceasta, din cauză că ceea ce se cîștigă în ceea ce privește generalitatea mulțimii de convergență se pierde prin introducerea unei mulțimi de excepție, pe care convergența ar putea să nu aibă loc. O analiză mai atentă ar putea să aducă unele precizări suplimentare în această privință.

*

Teorema lui Vasilescu ca și diferitele ei variante introduc în analiza matematică un tip nou de mulțimi excepționale. Într-adevăr, aici mulțimea excepțională în raport cu convergența către f nu numai că depinde de funcția f, dar se și definește prin raportare directă la proprietățile lui f, anume constă din punctele în care nu are loc o anumită proprietate punctuală a funcției f.

Diferitele variante ale teoremei lui Vasilescu, puse în evidență prin analiza lui Țevy, au scos în același timp la iveală un substrat comun și un aspect de altă natură al diferitelor tipuri de restricții continue care apar la diferite clase de funcții reale. Prin legăturile ei profunde cu teorema lui Blumberg, cu cea a lui Luzin și cu teorema privind existența unei restricții continue pe un rezidual la orice funcție cu proprietatea lui Baire, teorema lui Vasilescu pune într-o lumină nouă chiar aceste teoreme, creează variante „de convergență" ale acestor teoreme, punînd în evidență tot atîtea aspecte ale aproximării funcțiilor arbitrare prin funcții continue.

Numeroase întrebări naturale își așteaptă răspunsul, în legătură cu rolul continuității și al funcțiilor arbitrare în teorema lui Vasilescu. În ce măsură putem obține teoreme de tip Vasilescu în care continuitatea să fie înlocuită cu diferențiabilitatea sau chiar cu analiticitatea? (Un rezultat relativ recent al lui Jack Ceder, în „Fundamenta Mathematicae", 1969, rezultat care include unele teoreme mai vechi ale lui I. Maximoff din 1936 și F. M. Filipczak din 1966, atrage atenția asupra posibilităților existente în această privință: Fie f o funcție reală, definită pe o mulțime A, nenumărabilă, de numere reale. Există o mulțime numărabilă C inclusă în A, astfel încît, pentru orice x din $A - C$, se poate găsi o mulțime B bilateral densă în sine — în sensul că orice punct din B e punct

de acumulare bilaterală — conținînd pe x și astfel încît restricția lui f la B să fie monotonă și să admită derivată — finită sau infinită.) Ce precizări pot apărea atunci cînd, în loc de funcții arbitrare, luăm, în teorema lui Vasilescu, funcții din diferite clase particulare (de exemplu clasa funcțiilor analitice în sensul lui Luzin-Suslin, clasa funcțiilor proiective, clasa funcțiilor boreliene etc.) așa cum am obținut mai sus variantele teoremei lui Vasilescu pentru funcții măsurabile și pentru funcții cu proprietatea lui Baire? Probabil că în acest fel se regăsesc și unele rezultate cunoscute, așa cum am regăsit la un moment dat un rezultat al lui Fréchet din 1905. Dar simplul fapt al aducerii într-o albie comună a unor rezultate atît de variate este semnificativ pentru capacitatea teoremei lui Vasilescu de a include în raza ei de acțiune un număr important de fapte din analiza matematică.

Scanned with CamScanner

ALEXANDRU FRODA

Primele decenii ale secolului nostru, odată cu tendința de a se studia clase de funcții din ce în ce mai generale, aduc în atenția matematicienilor studiul proprietăților aparținînd tuturor funcțiilor reale de una sau mai multe variabile reale. Existența unor proprietăți nebanale de acest tip rezultă din faptul că aici arbitrarul se referă numai la legea de corespondență, în timp ce mulțimea de definiție și mulțimea în care funcția își ia valorile rămîn particulare (spațiul R^n și respectiv dreapta numerică). O funcție cu adevărat arbitrară ar fi de tipul $f:A \to B$, unde A și B sînt mulțimi arbitrare, neînzestrate cu nici o structură, legea de corespondență fiind de asemenea arbitrară. Dar nu la astfel de funcții se referă rezultatele obținute, în special între 1910—1930, de matematicieni ca Denjoy, Young, Blumberg, Luzin și alții. Toți acești autori obțin teoreme relative la distribuția anumitor proprietăți locale ale unei funcții reale arbitrare de o variabilă reală (uneori și de mai multe variabile reale). Aceste teoreme cuprind, în esența lor, informații profunde asupra structurii dreptei numerice sau a spațiului R^n. Tocmai în această ordine de idei se înscriu multe din rezultatele lui Alex. Froda, cuprinse în lucrările sale din 1928 și 1929, care culminează cu teza sa din 1929 și pe care le reia în 1948 și în 1955. Un rezultat tipic în această privință, legat de numele lui Alex. Froda, este acela din teză, care afirmă că mulțimea punctelor de discontinuitate de prima specie ale unei funcții reale arbitrare, de o variabilă reală, este cel mult numărabilă. Ceea ce se știa anterior era doar faptul că dacă o funcție reală de variabilă reală nu posedă nici un punct de discontinuitate de a doua specie, atunci punctele de discontinuitate ale funcției formează o mulțime cel mult numărabilă. Acest din urmă rezultat a fost extins în 1956 de către Yu. Y. Prohorov la funcții de o variabilă reală cu valori într-un spațiu metric (*Convergence of random*

Scanned with CamScanner

processes and limit theorem in probability theory, „Teor. Veroyatnosti i Primenenie", 1(1956), pp.177—238), iar L. S. Gal a obţinut în 1957 un rezultat oarecum vecin: Dacă o funcţie de o variabilă reală, cu valori într-un spaţiu metric, este continuă la dreapta (sau la stînga) în fiecare punct, atunci punctele ei de discontinuitate formează o mulţime cel mult numărabilă. (*On the continuity and limiting values of functions*, „Trans. American Math. Soc.", 86 (1957), pp.321—334.) Un rezultat care depăşeşte atît pe cel al lui Prohorov, cît şi pe cel al lui Gal a fost obţinut recent de către Wang Yim-Ming (*A theorem on points of discontinuity of functions*, „Journ. London Math. Soc.", 40(1965), pp. 324—325) : Fiind dată o funcţie de o variabilă reală cu valori într-un spaţiu metric, punctele ei de discontinuitate în care există cel puţin una din limitele unilaterale formează o mulţime cel mult numărabilă. Este de observat că, în timp ce rezultatele lui Prohorov şi Gal lăsau neatinsă teorema lui Alex. Froda, rezultatul lui Wang Yim-Ming constituie, pe de o parte, o întărire a teoremei lui Froda, chiar în cazul funcţiilor reale de o variabilă reală, iar pe de altă parte ea este o extensiune a acestei întăriri la funcţii de o variabilă reală cu valori într-un spaţiu metric. Ar fi interesant să se urmărească mai departe posibilitatea de a se înlocui, în această teoremă, spaţiul metric printr-un spaţiu mai general, în care are sens ideea de convergenţă. Pe de altă parte, nu este lipsit de sens să se caute corespondentul teoremei lui Froda la funcţii reale de mai multe variabile reale.

Teorema lui Froda asupra discontinuităţilor de prima specie ale unei funcţii arbitrare de o variabilă reală figurează în nenumărate tratate şi manuale de analiză matematică. La aproape 50 de ani de la publicarea ei, nu numai că nu a fost uitată, dar o învaţă orice student din anul I al facultăţilor de matematică. Este cu drept cuvînt o teoremă clasică. Atît de clasică, încît ea a intrat în „folclorul matematic". După ce, multă vreme, teorema a fost menţionată fără a se mai aminti numele autorului ei, ne întrebăm cîţi dintre matematicienii de azi ştiu că această teoremă aparţine lui Froda.

Alte rezultate interesante ale lui Froda se referă la clasificarea discontinuităţilor funcţiilor reale de una sau mai multe variabile reale. Pentru funcţii de o variabilă există distincţia clasică între discontinuităţi de prima specie şi

Scanned with CamScanner

discontinuităţi de a doua specie. În ceea ce priveşte funcţiile de două variabile reale, există o clasificare dată în deceniul al patrulea al secolului nostru, de către Verčenko şi Kolmogorov, dar aceasta nu are eleganţa şi simplitatea celei relative la funcţii de o variabilă. Ideea lui Alex. Froda a fost de a introduce drept criteriu de clasificare a punctelor de discontinuitate comportarea oscilaţiilor iterate. La prima vedere, acest criteriu pare neindicat, deoarece, după cum au arătat mai de mult Denjoy şi Sierpiński, iterata de ordinul al treilea a oscilaţiei oricărei funcţii coincide cu iterata ei de ordinul al doilea. H. Blumberg introdusese în 1917 („Annals of Mathematics", vol.18 (1917), pp.147—160) diferite tipuri de oscilaţii generalizate, definite ca şi oscilaţia obişnuită, însă neglijîndu-se mulţimile aparţinînd unei clase aditive şi ereditare de mulţimi (clasa mulţimilor finite, clasa mulţimilor numărabile, clasa mulţimilor de prima categorie, clasa mulţimilor de măsură nulă). Iteratele unor astfel de oscilaţii manifestă o mult mai mare fineţe în comportare, însă nici unul dintre aceste tipuri de oscilaţie nu se impune în mod natural drept criteriu de clasificare a discontinuităţilor. Alex. Froda nu se opreşte la nici unul dintre tipurile de oscilaţie introduse de Blumberg (dealtfel, după cum însuşi mărturiseşte într-un articol din 1955, a luat cunoştinţă de lucrarea lui Blumberg abia ulterior), ci introduce un alt tip de oscilaţie, care diferă în aparenţă foarte puţin de oscilaţia obişnuită, dar care se dovedeşte a fi de o deosebită fineţe în ceea ce priveşte operaţia de iterare: aceasta este oscilaţia obţinută prin neglijarea valorii funcţiei într-un singur punct, tocmai în punctul în cauză, în care se studiază discontinuitatea. Acest tip de oscilaţie se recomandă în modul cel mai natural drept criteriu de clasificare a discontinuităţilor, deoarece această oscilaţie înregistrează comportarea funcţiei în întreaga vecinătate redusă a punctului în cauză. Alex. Froda o numeşte oscilaţia de vecinătate şi o notează $\omega_0(f,P)$ (oscilaţia de vecinătate a funcţiei f în punctul P). Punctele P de discontinuitate pentru care $\omega_0(f,P) = 0$ sînt numite puncte de discontinuitate artificială; ele formează totdeauna o mulţime cel mult numărabilă. Punctele de discontinuitate neartificială P pentru care $\omega_0^\alpha(f, P) = 0$ $(\alpha > 1)$ formează o mulţime cel mult numărabilă. Punctele P pentru care $\omega_0^\alpha(f, P) = 0$,

în timp ce $\omega_0^{\alpha'}(f, P) > 0$ pentru orice $\alpha' < \alpha$ (numere ordinale de prima sau a doua clasă) sînt numite puncte de discontinuitate reductibile, de ordin α. Pentru $\alpha > 1$, mulţimea acestor puncte este cel mult numărabilă, în timp ce pentru $\alpha = 1$ această restricţie încetează. În sfîrşit, punctele P pentru care $\omega_0^{\alpha}(f, P) > 0$ oricare ar fi numărul α de prima sau a doua clasă transfinită sînt numite puncte de discontinuitate ireductibilă; mulţimea acestora este de prima categorie în sensul lui Baire.

Problematica de mai sus, modul ei de abordare şi rezultatele obţinute sînt deosebit de semnificative pentru maniera în care Alex. Froda a abordat teoria funcţiilor reale. Pornindu-se de la o noţiune sau o teoremă cunoscută, i se aduc acesteia unele modificări, în aparenţă neînsemnate, dar care-i conferă potenţe noi, obţinîndu-se astfel un instrument de investigaţie mai fin decît cel existent. După o analiză în care complicaţiile tehnice nu ascund niciodată eleganţa ideii care le străbate, se obţine un rezultat care se enunţă de cele mai multe ori simplu şi pregnant şi are un caracter oarecum definitiv.

În continuarea rezultatelor obţinute de Blumberg şi Froda, ar fi interesant să se studieze diferite clase de ecuaţii funcţionale în care funcţia necunoscută intervine atît liberă, cît şi prin oscilaţii sau numai prin oscilaţii ale ei de diferite tipuri şi de diferite ordine. Într-adevăr, punctele de continuitate în sens clasic sînt date de acele soluţii ale ecuaţiei $\omega(f,P) = 0$ care se găsesc în domeniul de definiţie al funcţiei f. O idee naturală este aceea de a considera ecuaţiile obţinute prin anularea oscilaţiilor care rezultă din neglijarea comportării funcţiei în punctele unei mulţimi aparţinînd unei anumite clase aditive şi ereditare — aşa cum a procedat Blumberg — sau în punctul în a cărui vecinătate studiem comportarea funcţiei, aşa cum a procedat Froda. Mergînd mai departe în această direcţie, apare naturală considerarea unor ecuaţii funcţionale obţinute prin combinarea mai multor tipuri de oscilaţii, cu ajutorul operaţiilor uzuale. Astfel de ecuaţii pot fi $\omega_1(f;P) = \omega_2(\omega_0(f;P), \omega_0(\omega_1(f;P)) = \omega_2(\omega_0(f;P)), \omega_3(f;P) = \omega_2(f;P)$ etc., unde prin ω_0 am notat oscilaţia lui Froda, prin ω_1 am notat oscilaţia lui Blumberg rezultată din neglijarea comportării funcţiilor pe mulţimile finite, prin ω_2 am notat oscilaţia lui Blumberg rezultată din neglijarea

Scanned with CamScanner

comportării lui f pe mulţimile numărabile, iar prin ω_3 am notat oscilaţia lui Blumberg rezultată din neglijarea comportării lui f pe mulţimile de măsură nulă. Se pot considera şi sisteme de ecuaţii de acest tip, cu mai multe funcţii necunoscute, se pot cerceta condiţii de existenţă şi de unicitate a soluţiilor. Problemele care apar în această ordine de idei sînt foarte inegale ca grad de dificultate, unele fiind susceptibile de răspunsuri care rezultă destul de repede din proprietăţile cunoscute ale oscilaţiilor di diferite tipuri de ordine, altele însă rezistînd oricărei abordări uzuale.

Tot atît de elegant se înfăţişează şi ciclul de lucrări din anii 1932, 1936, 1937, 1938 1939, 1940 şi 1949 relative la măsurabilitatea funcţiilor uniforme sau multiforme, unde complicaţiile tehnice sînt destul de mari. Alex. Froda este primul matematician care a abordat problema măsurabilităţii funcţiilor multiforme, obţinînd condiţii necesare şi suficiente de măsurabilitate, de altă natură decît cele date de Luzin pentru funcţiile uniforme, dar din care acestea din urmă pot fi deduse. De asemenea, Alex. Froda a obţinut mai multe condiţii necesare şi suficiente, de natură structurală, pentru ca imaginea unei funcţii multiforme, de n variabile (adică mulţimea de puncte din spaţiul cu $n+1$ dimensiuni în care funcţia se reprezintă geometric) să fie măsurabilă. Într-un articol din 1936, Alex. Froda asociază oricărei funcţii uniforme trei funcţionale şi anume: măsura exterioară, măsura interioară şi gradul de măsurabilitate în suport, definite pe baza analizei unor proprietăţi aparţinînd mulţimilor nemăsurabile de puncte. Considerînd măsura exterioară, respectiv interioară, a mulţimii V verticale de puncte prin care se defineşte $f(P)$ ca funcţie multiformă de P, numeşte aceste măsuri funcţii caracteristice ale măsurabilităţii verticale a lui $f(P)$ şi le notează $v_e(P)$, respectiv $v_i(P)$. Se constată că măsura exterioară $m_e I$, respectiv interioară $m_i I$, a mulţimii imagine I a funcţiei $f(P)$ nu poate fi inferioară, respectiv superioară valorii integralei interioare, respectiv exterioare, aplicate funcţiilor caracteristice $v_e(P)$, respectiv $v_i(P)$, ale măsurabilităţii verticale ale lui $f(P)$. În cazul particular în care $f(P)$, ca şi fiecare mulţime verticală sînt măsurabile, iar $v(P) = \text{măs}\, V$ este de asemenea măsurabilă, se obţine formula clasică de calcul al măsurii cu ajutorul unei integrale definite.

Rezultate surprinzătoare, obţinute în 1938, privesc structura mulţimilor de nivel ale funcţiilor continue de mai multe variabile. Plecînd de la un rezultat al său mai vechi care produsese o reacţie entuziastă a lui Dimitrie Pompeiu, rezultat conform căruia o funcţie continuă de două variabile ia valori egale în cel puţin o pereche de puncte diametral opuse ale oricărui cerc din planul variabilelor, Froda abordează situaţii mult mai generale, considerînd comportarea unei funcţii (finite sau nu) în perechi de puncte care se corespund într-o aplicaţie homeomorfă a unei curbe pe ea însăşi (curba fiind situată în planul variabilelor). Comparaţia valorilor funcţiei în perechi de puncte corespondente permite să se distingă caracterul punctual sau total discontinuu al funcţiei considerate. În ultimă instanţă, se constată că proprietăţile obţinute nu sînt specifice funcţiilor continue, ele aparţinînd tuturor funcţiilor cu proprietatea lui Darboux (această proprietate fiind adaptată în mod convenabil la funcţii de mai multe variabile) şi tuturor funcţiilor aproximativ continue (în sensul lui Denjoy). Cu acest prilej, se găseşte o proprietate remarcabilă a derivatei unei funcţii continue pe $[a,b]$ care ia valori egale în a şi b: Fiind dată o astfel de derivată, există un şir infinit şi descendent de intervale (deci fiecare interval este inclus în intervalul precedent), fiecare interval fiind de lungime egală cu jumătatea lungimii intervalului precedent şi astfel încît la extremităţile unui interval oarecare din şir derivata ia valori egale.

Ca o replică la studiul proprietăţilor de vecinătate, care i-a absorbit prima parte a carierei sale ştiinţifice, Alex. Froda a abordat, între anii 1951 şi 1957, un studiu oarecum dual, acela al „proprietăţilor la distanţă". Nu este vorba pur şi simplu de proprietăţi globale, ci de o anumită clasă de astfel de proprietăţi, anume acelea care angajează relaţii între valorile funcţiei în puncte situate la distanţă (exemple simple de astfel de proprietăţi sînt periodicitatea şi aproape periodicitatea). O problemă principală care se pune aici este aceea de a şti dacă şi în cadrul proprietăţilor la distanţă se manifestă caractere de distribuţie care guvernează totalitatea funcţiilor reale de una sau mai multe variabile reale. Răspunsul afirmativ la această întrebare se obţine asociind fiecărui punct P din spaţiul euclidian cu n dimensiuni nu o vecinătate — ca în cazul proprietăţilor locale („de vecinătate") — ci o aşa-numită „para-vecină-

Scanned with CamScanner

tate", caracterizată axiomatic ca o frontieră jordaniană, în stea, asociată centrului P, astfel încît fiecare punct P_1 al ei să satisfacă dubla condiţie ca distanţa de la P la P_1 să fie cuprinsă între ρ şi 2ρ, unde $\rho > 0$ este o constantă dată. O metodă de cercetare a proprietăţilor la distanţă tranzitive, cum ar fi $f(P) > f(P')$, este o teorie a „lanţurilor dirijate", aceste lanţuri fiind şiruri finite de puncte la distanţe convenabile şi care leagă un punct iniţial P_0 de un punct final P_ω. Un pas important mai departe se realizează prin introducerea unei axiome suplimentare în definiţia familiilor de para-vecinătăţi, care structurează spaţiul euclidian cu n dimensiuni. Axioma admite continuitatea paravecinătăţilor unei familii $F(\rho)$, în funcţie de centrul P al fiecăreia dintre ele. Se studiază modificările caracterelor de distribuţie, corespunzătoare introducerii noii condiţii.

Printre numeroşii matematicieni români care au studiat noţiuni şi probleme datorite lui Dimitrie Pompeiu se numără la loc de frunte şi Alex. Froda. În această ordine de idei, contribuţia cea mai interesantă pare să fie cea legată de derivata lui Pompeiu (o derivată care se anulează în orice interval, dar nu este identic nulă în nici un interval, se numeşte „derivată Pompeiu"), despre care am discutat pe larg într-un alt capitol al acestei cărţi. Alex. Froda a avut ingenioasa idee de a apropia noţiunea de „derivată Pompeiu" de aceea de „ecuaţie diferenţială de tip Lavrentiev". Amintim că Lavrentiev obţinuse în 1925 un exemplu de funcţie continuă $f(x,y)$, astfel încît prin fiecare punct din plan trec cel puţin două soluţii distincte ale ecuaţiei $y' = f(x,y)$.

Însă construcţia geometrico-analitică a lui Lavrentiev era destul de complicată, în timp ce Froda, folosind derivata lui Pompeiu, obţine în 1952, pe o cale elegantă şi relativ simplă, un exemplu de funcţie $f(x,y)$ cu proprietatea cerută de Lavrentiev (exceptînd continuitatea lui f).

O altă contribuţie interesantă se referă la celebra problemă a intervalului de contracţie. Este vorba de un interval (a',b'), conţinut în (a,b), cu proprietatea că printre punctele ξ din (a,b) în care derivata unui polinom $P(x)$ de grad n, cu coeficienţi reali, satisfăcînd $P(a) = P(b)$, se anulează, există totdeauna un ξ astfel încît $a' < \xi < b'$, în timp ce

$$\frac{b'-a'}{b-a} < \alpha_n < 1.$$

Un interval (a',b') cu proprietățile de mai sus este, prin definiție, un interval de contracție pentru clasa polinoamelor de grad n, iar minimul lui α_n — în raport cu familia polinoamelor de grad n — este un coeficient de contracție. Acest coeficient fusese determinat de Ciacalov, dar Froda obține în 1949, în cazul particular al polinoamelor care nu admit rădăcini multiple, o demonstrație cu caracter mai elementar. Tot Froda stabilește în 1950 existența unui interval de contracție în cazul general, pe baza unei metode simple, care folosește o teoremă a lui Markov.

Într-un domeniu oarecum vecin cu acela al teoriei funcțiilor reale — anume în teoria mulțimilor — Alex. Froda a obținut unele rezultate care, în afara interesului lor de sine stătător, par să fie utile în unele cercetări de analiză. Avem în vedere în primul rînd contribuțiile relative la mulțimile de distanțe. După cum se știe, fiecărei mulțimi A dintr-un spațiu metric i se asociază mulțimea $D(A)$ a distanțelor dintre diferitele elemente ale lui A. Primul rezultat important relativ la mulțimile de distanțe a fost obținut de matematicianul polonez H. Steinhaus, care, în urmă cu vreo 40 de ani, a demonstrat că fiind dată o mulțime reală A de măsură interioară pozitivă, mulțimea $D(A)$ conține un interval de forma $(0,\alpha)$, cu $\alpha > 0$. Contribuțiile ulterioare în acest domeniu — datorite în special lui S. Piccard, care i-a consacrat o carte întreagă (*Sur les ensembles de distances des ensembles de points d'un espace euclidien*, Neuchatel, 1939) — au dezvăluit semnificația deosebită pe care teoria mulțimilor de distanțe o are în studiul diferitelor clase de funcții definite prin inegalități (funcții convexe, funcții subaditive etc.) și, în general, în analiza matematică. Spre deosebire de cercetătorii anteriori, care au studiat mulțimi de distanțe asociate unor mulțimi de natură destul de particulară Alex. Froda abordează, în 1953 și 1954, o problematică foarte generală. Sînt considerate mulțimi din „spațiul euclidian total", definit ca mulțimea punctelor cu o infinitate numărabilă de coordonate reale. Fiind dată o mulțime L de numere reale, se studiază structura mulțimilor E pentru care $D(E) \subseteq L$. Se demonstrează existența efectivă a unei clase nevide de mulțimi L, astfel încît, oricare ar fi E (cu distanțe inegale între perechi de puncte din E), E să fie minimală (în sensul că numărul punctelor sale reprezintă minimul compatibil cu dimensiunea fiecăreia din submulțimile sale finite: o

mulţime minimală, avînd dimensiunea n, are $n + 1$ puncte, şi reciproc) de îndată ce mulţimea $D(E)$ a distanţelor sale este inclusă într-o mulţime L.

O altă contribuţie în domeniul teoriei mulţimilor se referă la axioma alegerii. Fiind dată o familie $\mathfrak{F}$ de mulţimi abstracte E, se poate întîmpla ca extragerea a cîte unui element din fiecare E să dea naştere unei mulţimi „extrase" $X(\mathfrak{F})$, printre elementele căreia să se afle unele egale între ele. Extrasul se va numi, într-un asemenea caz, „impropriu" ; în cazul contrar, el va fi „propriu". Dacă, pentru o familie $\mathfrak{F}$ dată, fiecare extras este impropriu, se spune că $\mathfrak{F}$ este de clasă (I). Alex. Froda demonstrează existenţa efectivă a acestei clase şi studiază în 1952 proprietăţile ei caracteristice.

*

L-am cunoscut pe profesorul Alexandru Froda în jurul anilor 1950, cînd într-o sală mică a Facultăţii de matematică îi ascultam săptămînal prelegerile de teoria mulţimilor. Consideraţiile tehnice alternau cu comentariul de mare fineţe — matematică sau filozofică. Nimic nu-i era mai străin decît graba de a umple tabla cu formule şi de a trece mai departe. Fire contemplativă, Alex. Froda întîrzia îndelung în faţa unui rezultat deosebit, a unei cotituri periculoase într-o demonstraţie, a unui aspect paradoxal într-o teorie. O dialectică a detaliului, care la alţii alunecă de multe ori în pedantism, se convertea la Froda într-o discuţie de înaltă intelectualitate, care căpăta un interes în sine, deci independent de ansamblul din care acest detaliu făcea parte. Froda era prin excelenţă un gînditor al lucrurilor de început, care se delecta să surprindă aspectele şubrede ale unor noţiuni şi rezultate care interveneau în întemeierea marilor construcţii ale matematicii timpului său. Îi plăcea să zăbovească contemplativ la izvoarele disciplinelor matematice, fiind atras cu deosebire de faptele care intrau în conflict cu aparenţele. A urmărit cu pasiune dezbaterile furtunoase din deceniile al doilea şi al treilea ale secolului nostru, privind paradoxurile infinitului şi a rămas toată viaţa captivat de această problemă. În relaţii apropiate cu unii din marii protagonişti ai acestor dezbateri, ca Émile Borel şi Arnaud Denjoy, Froda a fost un matematician de formaţie prin excelenţă

Scanned with CamScanner

franceză, fapt care se acorda perfect cu legăturile sale strînse cu matematicieni ca Dimitrie Pompeiu și Simion Stoilow, și ei formați la Paris.

La una din prelegeri, prof. Froda ne-a evocat un episod din 1928, cînd prezentase, într-o ședință a Societății române de matematică, rezultatul său privind discontinuitățile de prima specie ale unei funcții reale arbitrare, de o variabilă reală. Traian Lalescu a avut o reacție de uimire, exprimîndu-și îndoiala asupra unui rezultat care părea să contrazică natura arbitrară a funcției considerate. Aceasta era starea de spirit de atunci în matematica românească. Proprietăți ale funcțiilor reale arbitrare, de o variabilă reală, fuseseră puse în evidență încă de la începutul secolului nostru, de către Young, Blumberg și alții, dar ele erau încă străine de mentalitatea matematică dominantă, înțelegerea lor venind abia ulterior. Dealtfel, așa cum arătăm în altă parte în această carte, un alt matematician român, Florin Vasilescu, publicase încă în 1927 o teoremă care se referea la toate funcțiile reale de o variabilă reală.

Tocmai acest caracter paradoxal al proprietăților aparținînd tuturor funcțiilor reale l-a atras pe Froda și l-a urmărit de-a lungul întregii sale activități matematice. Principalele reușite pe care le-a înregistrat în această privință se referă la clasificarea punctelor de discontinuitate și la proprietățile mulțimilor care rezultă din această clasificare. O tentativă care din păcate a eșuat se referă la teorema lui Blumberg, care afirmă că orice funcție reală definită într-un interval n-dimensional admite o restricție continuă pe o mulțime densă. În 1958, Alex. Froda a crezut că a putut extinde acest rezultat la funcții reale definite într-un spațiu metric oarecare. Dar cercetări ulterioare, ale altor autori, stimulate tocmai de această tentativă, au infirmat această posibilitate, limitînd valabilitatea proprietății lui Blumberg la anumite clase de spații metrice, printre care și spațiile metrice cu bază numărabilă. „Eroarea poate deveni o sursă prețioasă a adevărului matematic" scria Alex. Froda în introducerea la ultima sa carte *Eroare și paradox în matematică* (Editura enciclopedică română, București, 1971). Acest dicton s-a confirmat, după cum se vede, în cazul greșelii lui Froda privind teorema lui Blumberg. El s-a confirmat și cu prilejul unei alte frumoase erori, din 1965, cînd Froda

a exclamat, în titlul unui articol: *Constanta lui Euler — o irațională*. (Constanta C a lui Euler este, prin definiție,

$$\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln n\right) = 0{,}57721\ldots.$$

Problema de a se stabili dacă C este un număr irațional și, în cazul afirmativ, dacă această irațională este algebrică, nu a fost încă rezolvată.) Venerabilul matematician norvegian Viggo Brun avea să identifice punctul slab în demersul lui Froda, dar din această tentativă s-au născut cîteva criterii parametrice de iraționalitate al căror interes este de necontestat. Acest episod vine ca o replică îndepărtată la un altul, petrecut cu vreo zece ani mai devreme, cînd un student a crezut că a stabilit iraționalitatea constantei lui Euler și cînd profesorul Froda a fost cel care a sesizat caracterul vicios al argumentării. Dealtfel, Froda s-a dovedit, de mai multe ori de-a lungul carierei sale matematice, un maestru al identificării unor puncte șubrede în considerații matematice de o aparență ireproșabilă. În tinerețe, a găsit o greșeală în modul în care Émile Borel prezenta un rezultat al lui Hadamard privind polii unei funcții meromorfe, greșeală pe care a comunicat-o lui Borel printr-o scrisoare și pe care acesta nu a putut-o contesta. Tot Froda este cel care a identificat o greșeală în tratatul de algebră, odinioară de mare reputație, al lui Charles de Comberousse, în demonstrația teoremei, dealtfel bine cunoscută ca adevărată, care afirmă că atunci cînd un polinom întreg în raport cu x este identic nul, toți coeficienții săi sînt nuli. Recenzînd un articol al matematicianului american Ky Fan, care colaborase altă dată cu Fréchet, Alex. Froda a observat că generalizarea la n oarecare pe care Ky Fan o propunea pentru o teoremă dată de Banach în cazul $n = 2$ era în fapt valabilă numai pentru n par.

În lunga sa carieră, Alex. Froda a adus contribuții în numeroase domenii ale matematicii, de la analiză la algebră și de la teoria numerelor la mecanică. Dar, dincolo de această eterogeneitate a preocupărilor sale, un ochi atent poate observa că în mai tot ceea ce a făcut mai deosebit Alexandru Froda a introdus spiritul teoriei mulțimilor și al analizei matematice, spirit dominant în creația sa. Cercetările asupra zerourilor polinoamelor derivă din preocupări de analiză, la fel ca și cele privind intervalul

de contracţie. Originea în analiza reală a preocupărilor sale de teoria analitică a numerelor este evidentă, criteriile de iraţionalitate fiind direct legate de procesele de convergenţă din teoria şirurilor. Impregnate de spiritul teoriei funcţiilor de variabilă reală sînt şi preocupările sale privind fundamentele mecanicii. Froda pleacă de la observaţia că axiomatizarea mecanicii newtoniene, aşa cum a fost ea întreprinsă între 1909 şi 1929 de către matematicianul german Georg Hamel şi chiar mecanica raţională actuală lasă deoparte mecanica relativităţii generale şi mecanica cuantică şi ignoră rezultatele obţinute în domeniul analizei matematice de la mijlocul secolului trecut încoace. Froda are în vedere în mod special existenţa funcţiilor continue fără derivată, fapt care-l determină să conteste existenţa vitezei şi acceleraţiei în orice mişcare realizabilă şi în orice moment al ei. Această situaţie îl conduce pe autor la o propunere interesantă, conform căreia ipoteza aşa-numitului principiu fizic după care toate mărimile fizice observabile sînt continue şi continuu diferenţiabile (principiu care stă la baza axiomatizării mecanicii newtoniene propuse de Hamel şi revăzută de autori ca H. Herz, P. Painlevé, L. Zoretti, P. Appell, M. Brelot) trebuie înlocuită cu anumite postulate de finitudine care rezultă dintr-o confruntare a experienţei fizice cu aspectele matematice contemporane ale teoriei funcţiilor reale. Aceste postulate, propuse într-o lucrare amplă din 1952, ar urma să completeze axiomele deja existente ale mecanicii raţionale (minus existenţa vitezei şi acceleraţiei în orice mişcare realizabilă şi în orice moment al ei). Ideile din 1952 ale lui Alex. Froda au stîrnit un anumit ecou, care a determinat pe organizatorii Simpozionului internaţional de la Berkeley (California) din 1958, asupra metodei axiomatice, să-l invite pe Froda de a prezenta un raport asupra cercetărilor sale privind finitudinea în mecanica clasică, axiomele şi implicaţiile ei, raport care a fost publicat în Actele simpozionului.

Iniţiativa lui Alex. Froda de a renova bazele axiomatice ale mecanicii clasice, în spiritul teoriei moderne a funcţiilor reale, constituie o alternativă la un program mai amplu, formulat anterior de către marele matematician francez Arnaud Denjoy. Froda nu face nici o referire la acest program. Ideea principală a lui Denjoy consta în observaţia că analiza clasică, bazată pe calculul diferenţial şi integral

Scanned with CamScanner

al lui Leibniz și Newton, corespunde perfect concepțiilor care stau la baza fizicii clasice, însă concepția discontinuă despre materie, care stă la baza fizicii moderne, nu poate fi modelată decît cu instrumentele mai fine puse la dispoziție de teoria continuității și derivatei aproximative (asimptotice) în sensul lui Denjoy și Hincin. Amintim că noțiunile de continuitate și derivată aproximativă într-un punct x se obțin înlocuind în definițiile noțiunilor clasice corespunzătoare limita ordinară cu limita prin mulțimi care admit punctul x ca punct de densitate. (Mulțimea liniară A admite punctul x ca punct de densitate dacă A este măsurabilă și dacă

$$\lim_{\mu(I)\to 0} \frac{\mu(A \cap I)}{\mu(I)} = 1,$$

unde I este un interval oarecare centrat în x iar $\mu(B)$ este măsura mulțimii B).

Evident, așa cum continuitatea nu implică derivabilitatea, continuitatea aproximativă nu implică derivabilitatea aproximativă. Mai mult, se știe că o funcție poate fi continuă în orice punct și în același timp să nu aibă derivată aproximativă în nici un punct. Putem deci defini o noțiune de viteză aproximativă și putem concepe mișcări continue care nu posedă în nici un moment o viteză aproximativă. Rezultatele obținute de către Denjoy, Hincin, Tolstov și alți matematicieni permit să se determine condițiile în care se poate defini o accelerație aproximativă și raporturile ei cu accelerația propriu-zisă, cu viteza și viteza aproximativă și cu continuitatea și continuitatea aproximativă a unei mișcări mecanice. Să observăm doar că, în timp ce Froda reține proprietatea de continuitate a mișcării, renunțînd la obligativitatea vitezei și accelerației, Denjoy nuanțează înseși noțiunile de continuitate, viteză și accelerație, generalizîndu-le în așa fel încît clasa mișcărilor dotate cu viteză și accelerație devine mult mai largă decît în cazul concepției clasice.

Însă interpretarea fizică cea mai interesantă a noțiunii de derivată aproximativă pare să fie noțiunea de densitate aproximativă a unui corp într-un anumit punct. Nu cunoaștem dacă și în ce fel fizica matematică a valorificat sugestiile lui Denjoy. Știm însă că alte concepte ale analizei reale, cum ar fi proprietatea lui Darboux, au fost valorificate.

Scanned with CamScanner

Dar nu există încă studii mai sistematice, care să urmărească impactul teoriei moderne a funcţiilor reale asupra bazelor matematice ale fizicii moderne.

*

Froda rămîne în istoria matematicii româneşti ca un matematician cu o personalitate pregnantă, care şi-a urmat drumul propriei sale meditaţii mai degrabă decît pe acela care părea să fie drumul principal al momentului. Aşa se şi explică, probabil, relativa lipsă de ecou a unor construcţii totuşi atît de frumoase şi de închegate cum sînt tipologia discontinuităţilor funcţiilor reale şi studiul proprietăţilor la distanţă. Nu ne îndoim că printre matematicienii noilor generaţii se vor găsi unii care să reia aceste construcţii solitare şi să le plaseze în contextul susceptibil de a le reliefa întreaga lor monumentalitate.

Scanned with CamScanner

DAN BARBILIAN

După Omar Khayyam, istoria culturii nu cunoaşte decît un singur exemplu de creator de înaltă valoare în fiecare dintre cele două domenii — rege ale cunoaşterii, poezia şi matematica. Acesta este poetul Ion Barbu, cunoscut ca matematician sub numele Dan Barbilian.

Omar Khayyam a trăit într-o perioadă (secolele XI—XII) în care diferenţierea diferitelor domenii ale cunoaşterii, gradul lor de specializare erau încă foarte slabe. În aceste condiţii, o activitate simultană în poezie şi în matematică apare oarecum explicabilă, chiar dacă ea se soldează cu rezultate ieşite din comun în fiecare dintre cele două domenii, aşa cum s-a întîmplat cu Omar Khayyam. Rubaiatele sale sînt la fel de celebre ca şi Algebra sa.

O repetare a acestui fenomen în zilele noastre, în condiţiile unei maxime specializări a ştiinţelor şi artelor, este de-a dreptul surprinzătoare. Ea a fost totuşi realizată de către Ion Barbu.

Poeţi-matematicieni au mai fost, dar ei n-au realizat această dublă performanţă de a atinge suprema mărime atît ca scriitori, cît şi ca matematicieni. Este bine cunoscut exemplul lui Lewis Caroll, autorul lui *Alice în ţara minunilor* şi al studiului asupra sistemelor liniare, cu coeficienţi reali sau imaginari, semnat Charles L. Dodgson. Dar dacă *Alice în ţara minunilor* rezistă unei selecţii severe, este greu de spus acelaşi lucru despre opera matematică a lui Charles L. Dodgson.

Poetul Ion Barbu, matematicianul şi profesorul Dan Barbilian sînt ipostaze ale uneia şi aceleiaşi personalităţi. Dacă despre poet s-a scris destul de mult, despre matematician şi profesor s-a scris foarte puţin, iar publicarea relativ recentă a operei sale matematice atrage atenţia asupra acestui fapt. Cunoaşterea ipostazei de matematician a lui Ion Barbu este de natură să contribuie esenţial la înţelegerea profundă a activităţii sale poetice, deoarece

personalitatea poetică a lui Ion Barbu poartă marca formației sale matematice (vezi acad. Al. Rosetti și Liviu Călin, Cuvînt înainte la *Ochean*, Editura pentru literatură, București, 1964, p.VII).

L-am cunoscut pe prof. Dan Barbilian, ca student al său, în anii imediat următori celui de-al doilea război mondial, ani care se caracterizează, în activitatea sa științifică, prin trecerea din ce în ce mai pronunțată de la vechile sale preocupări de geometrie, cărora le consacrase anii tinereții, la abordarea unor probleme fundamentale ale algebrei moderne și ale teoriei numerelor. Unul dintre marile merite ale lui Dan Barbilian îl constituie faptul de a fi fost printre primii care au introdus la noi în țară preocupările de algebră modernă — algebră axiomatică, cum îi plăcea s-o numească. Introducerea algebrei moderne în învățămîntul matematic universitar din țara noastră este incontestabil legată și de numele său. Bine cunoscut în cercurile specialiștilor din întreaga lume, Dan Barbilian este autorul unor rezultate importante de algebră și al unor spații care-i poartă numele. Este remarcabilă, în opera sa matematică, luciditatea cu care intuiește de fiecare dată liniile principale ale dezvoltării ulterioare.

Dan Barbilian creează opera sa algebrică într-o perioadă în care, după un proces îndelung de acumulare a numeroase fapte particulare, se simțea nevoia unei organizări a acestui material, o ierarhizare a sa, prin desprinderea unor structuri generale. Tocmai în această algebră așa-numită nealgoritmică s-a manifestat, după cel de-al doilea război mondial, activitatea creatoare a lui Dan Barbilian, activitate care reeditează, pe un alt plan și cu alte mijloace, tendința pronunțată spre aspectele abstracte, de extragere a esențelor, pe care poetul o manifestase în urmă cu ani, în ciclul *Joc secund*.

În preajma celei de-a 80-a aniversări a nașterii sale (Barbilian s-a născut la 19 martie 1895), Ed. Tehnică a publicat cel de-al treilea volum al operei sale didactice, cuprinzînd unele cursuri speciale predate la Universitatea din București. Cele două volume anterioare, publicate în 1968 și, respectiv, în 1971, au cuprins textul unor cursuri de geometrie elementară și de algebră elementară, toate predate înainte de anul 1944.

Prezența cuvîntului *elementară* în denumirea unora dintre cursurile lui Barbilian nu trebuie să înșele. Cînd,

în 1932, a ocupat, prin concurs, conferința de matematici elementare și geometrie descriptivă, Barbilian a precizat că domeniul matematicilor elementare corespunde chiar dezvoltării istorice a matematicii în antichitatea greacă, în evul mediu, în perioada Renașterii și în prima parte a erei moderne, pînă pe la mijlocul secolului al XVII-lea, cînd geometria analitică a lui Descartes și calculul diferențial și integral al lui Newton și Leibniz marchează o eră cu totul nouă în dezvoltarea matematicii. Dar dacă principalele teorii elementare erau deja încheiate către mijlocul secolului al XVII-lea, o nouă renaștere a doctrinelor elementare — cel puțin în ceea ce privește geometria — se observă abia în a doua jumătate a secolului al XIX-lea. Alături însă de obiectul elementar al matematicii există și o gîndire matematică elementară, care se manifestă, după Barbilian, prin „tendința de a concepe adevărurile matematice noi tot în limitele vechilor tipare, familiare și armonioase". Matematicile elementare sînt, pentru Barbilian, „matematici de întemeiere", iar spiritul elementar, în sensul precizat mai sus, reprezintă un fel de „clasicism al matematicilor". Barbilian își propune — și cît de frumos reușește! — nu numai să prezinte matematicile elementare, „acele cunoștințe care, asemenea și dimpreună cu ilustrele *Elemente* ale lui Euclid — de unde își trag numele — formează Carta însăși, constitutivă a matematicilor superioare, cît și a matematicilor aplicate", dar să și „favorizeze" dezvoltarea gîndirii elementare, motivînd că „spiritul matematic de cercetare, în momentele lui de valabilă activitate, procedează elementar, adică prin combinare de părți simple, luate în număr finit".

Am insistat asupra acestui punct de doctrină din opera lui Barbilian, deoarece el explică, în bună măsură, și obiectul și metoda multora dintre cursurile sale republicate în cele trei volume menționate. Mai mult, o bună parte din opera științifică a lui Barbilian (înțelegînd prin aceasta opera publicată sub formă de articole de revistă sau monografii) stă sub semnul aceleiași „elementarități" care nu are nimic comun cu spiritul rudimentar cu care, cum observă Barbilian, gîndirea curentă deseori o confundă. Este locul aici să amintim că paralel cu opera didactică se întreprinde și republicarea operei științifice originale a lui Barbilian, din care au apărut, la Ed. Didactică și Pedagogică, două volume (unul consacrat geometriei,

altul algebrei) în 1967 și un al treilea, în 1970, consacrat lucrărilor cu caracter elementar. Prefațatorul acestui din urmă volum, academicianul Gheorghe Vrănceanu, precizează că „deși aceste *Note* sînt cu caracter elementar, expunerea lor face apel în cele mai multe cazuri la teorii matematice înalte".

Un alt punct important de doctrină în opera lui Barbilian se referă la axiomatică și a făcut obiectul lecției sale de deschidere din 1942. Textul acestei lecții este reprodus în volumul al treilea al operei didactice. „Mai puțin stearpă decît critica literară față de literatura propriu-zisă, axiomatica se apropie totuși de cea dintîi prin preocuparea de a construi sinteze valabile nu între unități simple, ci între unități compozite, puse la îndemînă de o activitate anterioară". Așa cum critica este „arta de a gîndi prin cărți", matematica este, pentru Barbilian, arta de a gîndi prin teoreme, iar axiomatica arta de a gîndi prin doctrine. „O doctrină a doctrinelor, o matematică la puterea a doua", axiomatica se referă la marile sinteze de fapte matematice, sinteze pe care le pune în relație, așa cum critica literară pune în relație operele literare. Mecanica newtoniană, mecanica relativistă, topologia, teoria lui Galois a ecuațiilor, teoria funcțiilor automorfe sînt, pentru Barbilian, alături de discipline mai vechi ca geometriile euclidiene, neeuclidiene, proiective, circulare, doctrine matematice (sînt, toate, extensiuni ale așa-numitelor geometrii ale Programului de la Erlangen). O doctrină matematică este, pentru Barbilian, un sistem închis de cunoștințe, în sensul că oricare ar fi numărul teoremelor dezvoltate în interiorul ei, nu părăsim niciodată un cadru prealabil fixat; în ceea ce privește exemplele date, acest cadru este obținut de faptul că toate rezultatele obținute pot fi interpretate ca invarianți ai grupului fundamental. O situație diferită o prezintă discipline ca analiza (cu excepția anumitor ramuri, cum ar fi teoria lui Lie a ecuațiilor diferențiale), teoria probabilităților, numeroase capitole ale algebrei; acestea sînt sisteme deschise de cunoștințe, de aceea scapă axiomaticei. Ele sînt încă discipline doar axiomatizante (nu axiomatizate!), iar Barbilian se întreabă dacă ele vor atinge acea perfecțiune a disciplinelor axiomatizate, care, pentru el, se confundă cu doctrinele Programului de la Erlangen.

Astăzi știm că răspunsul la întrebarea de mai sus este negativ sau, mai degrabă, că întrebarea trebuie altfel

Scanned with CamScanner

formulată. Dar distincţiile fine introduse de Barbilian îşi păstrează în întregime interesul. Mai mult, raza lor de acţiune se măreşte acum, odată cu pătrunderea gîndirii matematice în toate domeniile de cercetare.

Trebuie să menţionăm rîvna deosebită a prof. N. Mihăileanu, îngrijitorul operei didactice şi autorul unui studiu introductiv, care aduce multe informaţii ultile. În condiţiile în care multe dintre cursurile lui Barbilian n-au mai rămas decît în exemplare izolate, uneori unicate în posesia unor persoane particulare, adunarea lor laolaltă, într-o formă coerentă şi chiar sistematică, a prezentat multe dificultăţi, pe care prof. Mihăileanu le-a învins, în cea mai mare parte.

Dan Barbilian era un mare contemplativ. Nu înceta nici o clipă să se mire în faţa structurii matematice a universului, întîrziind îndelung în faţa fiecărei proprietăţi noi, cu o prospeţime şi un neastîmpăr al spiritului în care omul de ştiinţă şi poetul erau deopotrivă prezenţi.

Figura profesorului Dan Barbilian a stîrnit multe discuţii şi controverse. Era, într-adevăr, un om ciudat în multe din manifestările sale şi, în particular, în relaţiile sale cu studenţii. El nu putea concepe altă atitudine faţă de ştiinţă decît aceea a pasiunii şi a dăruirii totale. Plin de dragoste faţă de studenţii care iubeau matematica, el îşi manifesta deschis dezaprobarea faţă de ceilalţi.

Profesorul Dan Barbilian presta un mare număr de ore peste obligaţiile care-i reveneau. Îmi aduc aminte că în iarna anului universitar 1945—1946 venea aproape zilnic la facultate, în jurul orei 15,30, fie pentru a-şi ţine cursul, fie pentru a vizita orele de seminar, unde intervenea deseori în discuţii. Simţea o nevoie organică de a-şi comunica şirul reflecţiilor sale matematice. Lecţiile sale nu erau conferinţe, nu aveau cursivitate şi nici spirit sistematic, fapt care nemulţumea pe acei studenţi care doreau în primul rînd să ia notiţe bune, după care să-şi poată pregăti cu uşurinţă examenul. O oră de curs era, pentru Dan Barbilian, în primul rînd un prilej de a se mărturisi, de a se elibera de frămîntările sale matematice recente. O stare febrilă îl stăpînea înainte de a-şi începe lecţia, o stare probabil asemănătoare celeia care-i stăpîneşte pe marii actori, înainte de a intra în scenă. În prima parte a unei ore de curs, Dan Barbilian relua de obicei chestiunile din lecţia precedentă, „regîndite aseară", după cum obişnuia de multe ori să spună. Cu acest prilej, el corecta unele aserţiuni din propria-i lecţie, retracta altele,

punîndu-ne în situaţia de a suprima o parte — uneori substanţială — a notiţelor luate anterior. Dar chiar în timp ce făcea efortul de a ne prezenta reflecţiile sale ulterioare ultimei lecţii, gîndurile care-l vizitau ad-hoc îi tulburau din nou expunerea şi dacă, sub raport strict didactic, aceasta lăsa de dorit, ţinuta de înaltă intelectualitate a savantului în plină efervescenţă a ideilor oferea un spectacol de-a dreptul captivant. Profesorul Dan Barbilian era lipsit de spontaneitate chiar în chestiuni cu caracter relativ elementar, dar această „încetineală" a gîndirii, explicabilă dacă ţinem seamă de firea sa contemplativă, de gustul său pentru reverie, era compensată de o profunzime neobişnuită a cugetării. Aşternute pe hîrtie, expunerile sale matematice sînt, în opoziţie cu expunerile sale orale, de o claritate deplină, deosebit de sistematizate şi de o rigoare care merge uneori pînă la pedantism; se simte parcă influenţa stilului cărţilor germane de matematică, pe care le-a frecventat îndeosebi. Dar atît expunerile sale matematice orale, cît şi cele scrise se remarcau prin limbajul lor colorat, bogat în cuvinte vechi, care înlocuiau neologisme uzate, lipsite de imagine (*mulţime deşartă* în loc de *mulţime vidă, iuţeală* în loc de *viteză, petec* în loc de *porţiune, stăpîneşte* în loc de *este în vigoare*), dar în acelaşi timp surprindeau prin folosirea unor neologisme în contexte inedite, prin înlocuirea unor cuvinte vechi sau a unor neologisme uzate prin neologisme proaspete sau chiar prin creaţii proprii (*radiarea* în loc de *suprimarea, brutală* în loc de *tare, ansamble* în loc de *mulţimi, refontă* în loc de *reconstrucţie, mai laxă* în loc de *mai puţin restrictivă, agregate* în loc de *expresii*). Cele mai abstracte formaţiuni matematice i se înfăţişau probabil într-o reprezentare a universului sensibil, de exemplu sub forma unei vegetaţii luxuriante, ca în *Teoria aritmetică a idealelor* (Ed. Academiei, Bucureşti, 1956), unde pagini întregi par desprinse dintr-o carte de botanică sau dintr-un manual de horticultură, prin termeni ca *arbore, parc, boschet, coroană, încoronare* etc. şi prin teoreme ca „Boschetele sînt cazuri particulare de parcuri". Textele sale matematice, deşi abundă în termeni metaforici, îşi păstrează claritatea şi precizia. Cine oare va demonta acest mecanism alcătuit din piese atît de fine şi eterogene, care este limbajul textelor matematice ale lui Barbilian, pentru a explica în ce fel anume se interferează la el şi ajung la o coexistenţă armonioasă două tendinţe atît de opuse ale limbajului uman

cum sînt tendinţa spre rigoarea ştiinţifică şi tendinţa spre ambiguitatea lirică? Ceea ce căuta Barbilian nu era cuvîntul rar, ci cuvîntul adecvat şi, în acelaşi timp, proaspăt, care să facă imagine. Căuta? Ajungea la el în mod firesc, fără efort! Stilul textelor sale matematice nu este ceva adăugat, ci intră ca o componentă organică a universului său de gîndire. „Matematicile, la fel cu celelalte activităţi omeneşti, ridică probleme de stil, care nu pot fi indiferente filozofilor culturii" scria el încă în 1943 (în revista „Numerus", vol.10, p.65). De aceea, nu trebuie să ne mire că undeva (*Îndrumar metodic al cursului de geometrie*, Universitatea Bucureşti, secţia fără frecvenţă, 1953/1954, p.6) face studenţilor următoarea recomandare: „În redactare nu are atîta preţ poleirea frazelor, cît organizarea ideilor". Pentru Dan Barbilian expunerea orală nu era un scop, ci doar un mijloc pentru pregătirea expunerii scrise, singura edificatoare. Astfel, tot în *Îndrumarul* citat (p.6) spune: „Nu există matematice vorbite (decît la examene şi în congresele matematicienilor). Un adevăr matematic nu poate fi primit ca achiziţionat decît dacă e prezentat scris şi dacă rezistă verificării oamenilor competenţi". Dan Barbilian făcea o distincţie netă între consideraţiile matematice propriu-zise şi comentariile pe marginea acestora. Primele trebuiau să se supună unei austerităţi desăvîrşite, orice înlocuire a silogismului prin intuiţie fiind o inadvertenţă faţă de rigoarea ştiinţifică. „Desenul corupe raţionamentul" scria el în *Îndrumarul* citat (p.14). În ceea ce priveşte însă comentariul pe marginea dezvoltărilor matematice propriu-zise, Dan Barbilian îşi permitea cele mai îndrăzneţe analogii şi excursii ale spiritului. Pentru ca să folosim propriile sale cuvinte, vom spune că operele matematice îl robeau şi-l încîntau întocmai ca operele pasiunii şi imaginaţiei. („Numerus", vol.10, 1943, p.64).

Spuneam că lecţiile lui Dan Barbilian nu aveau caracterul unor conferinţe. O singură dată şi-a transformat lecţia într-o conferinţă: atunci cînd şi-a ţinut lecţia de deschidere la cursul de teoria lui Galois, lecţie care mi-a prilejuit prima întîlnire cu profesorul Barbilian şi pe care nu o voi uita niciodată. A intrat în sala de curs, sprijinindu-se în bastonul de care nu se despărţea niciodată, şi a trecut printre rîndurile de bănci, dînd mîna cu fiecare student în parte, recomandîndu-se şi interesîndu-se de calificativul obţinut la examenul de algebră din anul întîi (cursul pro-

fesorului Barbilian se adresa studenţilor din anul al doilea). Reacţiona nuanţat, înseninîndu-se sau încruntîndu-se, după cum calificativul era bun sau slab. O dată terminată această minuţioasă luare de contact, a ieşit dintre bănci, a scos din buzunar cîteva însemnări şi, după o scurtă tăcere, şi-a anunţat prelegerea de deschidere *Évariste Galois şi ideea de grup*. Prelegerea ne-a impresionat, deşi înţelegeam foarte puţin din referirile matematice pe care le conţinea. Geniul algebric al lui Galois, acest matematician ucis în duel la douăzeci şi ceva de ani, după ce se manifestase ca un antiregalist convins în timpul evenimentelor clocotitoare ale Franţei anilor 1830 şi suportase rigorile închisorii Sfînta Pelagia, nu putea să nu fascineze pe Dan Barbilian, care vedea în Galois o prefigurare a acelui mare poet ce avea să reediteze, cu patruzeci de ani mai tîrziu, în timpul Comunei din Paris, o împletire analogă de geniu şi neconformism: „Iată viaţa violentă a acestui de tot mare matematician. Ea poate fi pusă în paralelă cu genialitatea la fel de timpurie, cu radicalismul arzător şi mai ales cu neconformismul unui alt mare francez: poetul Arthur Rimbaud, unul din incendiatorii Comunei de la 1870" (*Curs de algebră axiomatică*, partea a III-a, Teoria lui Galois în axiomatizarea lui Steinitz. Ed. Facultăţii de ştiinţe din Bucureşti, 1945—1946, p.10). Memorabile sînt acele pasaje ale lecţiei care învie zilele petrecute de Galois în închisoare:

„În această a doua şedere la Sfînta Pelagia, îşi va fi adîncit Galois ideile lui algebrice şi mai ales analitice: printr-o muncă de cap, fără însemnări, în interminabilele preumblări prin curtea închisorii, luat în rîs de patrioţii, oameni din popor, închişi odată cu dînsul, silit adesea să ia parte la beţiile lor de rachiu, procurat prin contrabandă de paznici, adevărată otravă pentru organismul său şubred".

„Aceste scene, puţin înălţătoare, erau răscumpărate însă seara printr-un ritual impresionant. Deţinuţii politici se adunau în curtea închisorii, înainte de sunarea stingerii, în jurul unui tricolor, să cînte imnuri patriotice, sfîrşind totdeauna cu Marseilleza. La cuvintele «*Amour sacré de la Patrie*» toţi îngenuncheau. De sus, din celulele de lîngă streaşină, corul copiilor condamnaţi pentru vagabondaj ... relua accentul Marseillezei şi culmina cu imnul tineretului republican de pe atunci «*Nous entrerons dans la carrière /Quand nos aînées n'y seront plus; /.../ Nous aurons le sublime orgueil/ De les venger ou de les suivre*»".

„Bătrînii defilau apoi pe dinaintea tricolorului, îi sărutau aplecaţi faldurile, ca să urce apoi în celulele lor îngheţate, unde Galois relua, de-a lungul ceasurilor de insomnie, firul întrerupt al meditaţiilor lui matematice".

De obicei însă lecţiile lui Dan Barbilian aveau caracterul unor ore de lucru, care-ţi dădeau prilejul să pătrunzi în laboratorul său de creaţie, să te insinuezi în preocupările sale ştiinţifice. Nu-i plăceau expunerile ex-catedra, ci lecţiile de tip seminar ; dorea să lucreze cu sala, să simtă participarea ei, îi solicita opiniile, o interpela, era pasionat de schimbul de replici cu studenţii talentaţi, vioi, spontani, care-l urmăreau cu interes. Absorbit de firul expunerii matematice, Dan Barbilian pierdea simţul realităţii şi era tentat să vadă în orice student din bancă un pasionat în ale algebrei. Se spune că poezia presupune o doză de naivitate. Şi matematica presupune o doză de naivitate. Voi relata o întîmplare cu Dan Barbilian, semnificativă în această privinţă.

Într-o zi se afla în sala de curs (pe lîngă studenţii obişnuiţi) şi un cetăţean „în vizită". Profesorul Barbilian, după obiceiul său de a interpela pe studenţi, l-a interpelat şi pe acest cetăţean, care a răspuns însă printr-o tăcere totală. Atunci, profesorul, puţin scandalizat, i-a cerut să definească o noţiune de bază a cursului, aceea de „grup". Cetăţeanul a tăcut şi de astă dată, spre supărarea ajunsă la apogeu a profesorului. Un student se ridică sfios şi atrase atenţia că cetăţeanul în cauză nu este student, nu e „de la noi"[1]. Dar replica prof. Barbilian veni promptă şi gravă : „Oricît, noţiunea de grup este o chestiune fundamentală !".

Profesorul Barbilian imaginase, pe lîngă calificativele obişnuite (insuficient, suficient, bine şi foarte bine), două calificative noi : „foarte bine cu elogii" şi „foarte bine cu distincţie". Primul dintre aceste calificative nu a fost acordat decît o dată (lui A. Halanay), cel de-al doilea de cîteva ori, dar foarte rar. Mi s-a povestit că înainte de război acorda studenţilor care obţineau prea uşor aprobarea de a fi mereu reexaminaţi, deşi pregătirea lor se dovedea a fi mereu insuficientă, calificativul „suficient cu scîrbă".

La un examen cu Barbilian era recomandabil să părăseşti sala imediat după ce ai primit calificativul de trecere. Un

---

[1] Era o zi de iarnă geroasă şi omul intrase să se încălzească.

student care întîrziase să-şi îmbrace paltonul şi să-şi strîngă cărţile, după ce luase examenul, a fost din nou interpelat, într-o chestiune la care candidatul următor nu răspunse. Neputînd răspunde, studentului i s-a retras calificativul de trecere.

Aceste capricii ale comportării sale nu pot ascunde totuşi conştiinciozitatea sa profesională, care uneori se manifesta — este adevărat — de o manieră originală, dar nu mai puţin fermecătoare. Pentru a ilustra acest fapt, mă voi referi din nou la *Îndrumarul* metodic al cursului de geometrie, deja citat mai sus. Acest *Îndrumar* se adresa studenţilor de la secţia fără frecvenţă şi, iniţial, era prevăzut ca un ansamblu de instrucţiuni cu caracter tehnic, menite să orienteze pe aceşti studenţi, în absenţa posibilităţii de a discuta direct cu profesorii şi cu asistenţii. Profesorul Barbilian nu s-a mulţumit însă cu atît, deşi nimeni şi nimic (în afară de propria sa conştiinţă !) nu-l obligau la mai mult. În loc de cîteva pagini redactate rutinar, aşa cum se obişnuieşte în asemenea cazuri, Barbilian a scris un adevărat studiu, de proporţiile unei cărţi, în care consideraţii profunde asupra naturii matematicii şi uceniciei în studiul creator al matematicii se împletesc cu sfaturi practice de detaliu. Dealtfel, această grijă pentru semnificaţiile de ordin general ale lucrurilor, pentru formarea ştiinţifică a studentului străbate şi din celelalte cursuri ale sale. Am dat mai sus cîteva citate ilustrative în acest sens. Iată şi altele: „Datele numerice trebuie controlate de aproape, ca să concorde cu natura lucrurilor sau cu condiţiile practice. Astfel se va corecta o problemă în care e vorba de un pătrat cu latura 1 şi diagonala 3, căci conform unei teoreme diagonala pătratului de latură 1 e $\sqrt{2}$. De asemenea nu pot fi primite date ca acestea: cateta de 2 metri şi ipotenuza de 1,5. Tot astfel probleme cu meridiane ale pămîntului mai mari decît 400 milioane de kilometri, trenuri cu iuţeli ca ale luminii etc.". (*Îndrumar*, p.7). „Ştiinţa e o construcţie obiectivă, care se desfăşoară în afară de noi, devenită aproape anonimă prin mulţimea contribuţiilor care i se aduc. Întocmai ca şi în arhitectura caracterelor, detaliile ieşite din mîna vreunui meşter iscusit se pierd în marele efort colectiv" (*Curs de algebră axiomatică*, partea a III-a, Ed. Facultăţii de ştiinţe din Bucureşti, 1945—1946, p.10). „Trebuie să admirăm deci drumurile tăinuite ale creaţiei matematice geniale, care

(întocmai ca topologia, în definiția lui Poincaré: arta de a raționa exact pe figuri greșit făcute) pare a fi, împingînd lucrurile pînă la butadă, arta de a judeca bine cu idei rău sau incomplet formulate" (același curs, p.12). „... ținem să atragem atenția asupra curioasei solidarități între adîncimea teoretică și eficiența practică, așa de des verificată în matematică" (același curs, p.397). „Asperitățile începuturilor trebuie nivelate, iar sagacitatea cititorului lăsată să se îndrepte asupra unor adevărate exerciții, nu asupra unor puncte de doctrină travestite în probleme. Altfel, munca de asimilare devine penibilă". (*Grupuri cu operatori*, Ed. Academiei R.P.R., 1960, p.6). De multe ori, reflecțiile lui Barbilian ating ipostaza matematicii ca fenomen de cultură: „A vedea în matematice o simplă colecție de probleme ierarhizate după greutatea lor, e o concepție fragmentară de tehnician" („Numerus," vol.10, 1943, p.74); „Criza civilizației științifice grecești a fost imposibilitatea de a concepe numărul irațional. Nu cucerirea romană, ci infirmitatea lor de a depăși anumite prejudecăți privitoare la rigoarea matematică, de a accepta și alte moduri de existență matematică, istovește curînd geniul grec. Arhimede singur face o excepție. Prin aceasta, Arhimede aparține mai mult evului celui nou" (*Curs de algebră axiomatică*, partea a III-a, Ed. Facultății de științe din București, 1945—1946, p.5).

Printre diferitele comentarii presărate de Barbilian în cursurile și articolele sale de matematică, un loc special îl ocupă cele privitoare la legătura matematicii cu poezia. Iată o reflecție simptomatică pentru mutarea centrului de greutate al preocupărilor sale de la poezie la algebră: „Cadența universală a semnului matematic consolează ușor de pulsația greoaie a versului" („Numerus", vol. 5, 1939, caietul 42, p.28). Dar iată, în același loc, exprimarea unei idei duale: „... simplul fapt al vestirii unei ore de seară are nevoie de mai mult decît cele cîteva cifre ale notației astronomice; are nevoie de toată amplitudinea unui vers" („Numerus", vol.5, 1939, caietul 42, p.30). În aceste două afirmații — numai aparent contradictorii — se află poate una din marile dileme ale activității poetului-matematician, permanenta sa oscilare între ceea ce este explicabil și ceea ce este inefabil. Cît de bine i se potrivesc lui Barbilian rîndurile scrise cîndva de Emerson (citate în „Numerus", anul 1940, p.173): „Nu ascultăm cu cea mai

mare consideraţie versurile unui om care este numai poet, nici problemele lui, dacă este numai algebrist; dar dacă un om este în acelaşi timp familiarizat cu fundamentele geometrice ale lucrurilor şi cu splendoarea lor sărbătorească, poezia lui este exactă şi aritmetica lui muzicală". Sîntem obişnuiţi să atribuim marii poezii o ambiguitate infinită şi, din acest motiv, „poezia exactă" despre care vorbeşte Emerson poate să pară o iluzie. Dar, în ceea ce priveşte poezia lui Ion Barbu, nu numai că alcătuirea versurilor sale întruchipează perfecţiunea, nefiind susceptibilă de „ameliorări", dar însăşi încărcătura lor lirică pare să aibă univocitatea unei teoreme matematice. Asupra lipsei de ambiguitate a poeziei lui Ion Barbu au atras atenţia, în ultima vreme, unii cercetători. Avem în vedere în primul rînd articolul „Receptivitatea lirică a lectorului modern" de Ştefan Aug. Doinaş, publicat în „Scînteia", nr.7579 din 11 ianuarie 1968, p.4. În monografia despre Ion Barbu, datorită lui Basarab Nicolescu, intitulată *Cosmologia Jocului secund* şi apărută în Editura pentru literatură (1968), poezia lui Ion Barbu este analizată în ipoteza absenţei ambiguităţii, nu numai la nivelul întregii opere, dar chiar la nivel local, în interpretarea fiecărui vers. Această situaţie pune probleme teoretice deosebit de interesante şi de delicate; s-ar putea să avem aici una din manifestările interferenţei dintre limbajul ştiinţific şi cel liric, aşa cum sînt ele reprezentate în cercetările recente, prin mijloace structurale (a se vedea şi articolul nostru *Questions de poétique algébrique,* în Actes du X-ième Congrès international des linguistes, Bucarest, 1967).

Pe de altă parte, alţi cercetători, ca Jean Pierre Benzécri, din Paris (comunicare orală), consideră că deschiderea, chiar în forma sa restrictivă a ambiguităţii, nu numai că este inevitabilă în limbajul poetic, dar este la fel de inevitabilă şi în limbajul ştiinţific. Benzécri are în vedere aici faptul că o expresie, fie ea şi matematică, naşte în mintea fiecărui cititor o asociaţie specifică de idei, de gînduri, această asociaţie depinzînd de cultura, de imaginaţia, de personalitatea cititorului. Poziţia lui Benzécri se situează la polul opus faţă de o altă poziţie extremistă, aceea de mult clasică, a lui Charles Bally, care nu vedea decît o singură lectură posibilă a unui text literar, atribuind deci operei poetice un caracter esenţial închis.

Exemplul poeziei lui Ion Barbu este deosebit de semnifi-

cativ din punctul de vedere al dialecticii dintre ambiguitate şi precizie.

Înainte de a fi discutată în structura ei profundă, poezia lui Ion Barbu pretinde o înţelegere a termenilor cu care ea lucrează, a asociaţiilor lor fireşti care-i leagă de termeni corespunzători din geometrie, algebră sau fizică. Această înţelegere preliminară este aici tot atît de vitală ca şi cunoaşterea limbii române. La Ion Barbu, unele cuvinte sau expresii ale limbii comune capătă o accepţie inedită, influenţată de matematică, iar unele expresii din matematică, inexistente în limba literară comună, sînt folosite pentru prima oară în afara matematicii. Dar detectarea şi înţelegerea acestor expresii nu se pot face prin simpla consultare a unui manual sau a unui dicţionar de termeni matematici ; ele reclamă o cultură matematică vastă, care să învedereze întreaga migraţie a acestor termeni, transformările de semnificaţii pe care ei le parcurg. De obicei, un termen de specialitate pătrunde în poezie numai după ce s-a umplut de sevă, prin participarea sa la unele evenimente de seamă ale evoluţiei ştiinţei. Termenul de grup, atît de important în poezia lui Ion Barbu, îşi dezvăluie întreaga amploare a semnificaţiei sale numai după ce ai cunoscut un număr de formaţii particulare, dintre cele mai variate, pe care noţiunea de grup le sintetizează, şi ai putut urmări măcar o parte din traiectoria dezvoltării ei teoretice. Numai cu această avuţie şi experienţă însuşite poţi candida la înţelegerea corespunzătoare a unei metafore ca *grupurile apei* sau a poeziei *Grup*, aşa cum numai după ce ai văzut un mare număr de case şi ai întîlnit cuvîntul *casă* în numeroase contexte, care să-ţi dea posibilitatea să distingi un mare număr de sensuri şi nuanţe pe care le comportă, poţi înţelege folosirea lui ulterioară cu eventuale nuanţe noi, la care capeţi accesul prin inducţie şi intuiţie. Este deci nevoie, într-o primă etapă, de o explicare a termenilor şi a asociaţiilor primare, explicare care prelungeşte aici cunoaşterea limbii în care este scrisă poezia. Dar inteligibilitatea dobîndită printr-o astfel de explicare rămîne foarte limitată, deoarece ea este dobîndită pe o cale artificială, cuvintele fiind desprinse dintr-un număr foarte sărac de contexte.

Această activitate de explicare a unor versuri poate să pară sterilă sau, cel puţin, minoră, deoarece, cum de atîtea ori s-a mai spus, vraja poeziei nu poate fi convertită în

elemente raționale. Explicațiile țin de funcția noțională a limbajului, în timp ce inefabilul poetic este un rezultat al funcției sale de sugestie. Aici ajungem însă la punctul-cheie al situației poetice, la adevărul atît de paradoxal care-l caracterizează : nu se poate sugera decît prin cuvinte precise. Mai mult, exigențele în materie de precizie sînt mai mari în limbajul de sugestie decît în cel noțional, deoarece funcția de sugestie purcede din cea noțională, derivă din ea și nu-și poate dezvolta registrul de mistere și ambiguități decît în măsura în care structura noțională care-i stă la bază este elucidată și precizată.

Încercarea de a sesiza sugestiile unui text poetic fără a-i cunoaște în prealabil baza sa noțională nu poate duce decît la manifestări (mai mult sau mai puțin deghizate) de ignoranță. Echivocurile ignoranței sînt prezentate uneori drept ambiguități și mistere ale poeziei, înlocuindu-se astfel efortul autentic de a se ajunge la bogățiile sugestive ale textului printr-o interpretare arbitrară derivînd exclusiv din „intuiția" cititorului.

În ceea ce privește conceptul de ambiguitate poetică, el trebuie relativizat prin distingerea mai multor niveluri posibile de ambiguitate. Pentru a nu discuta decît un aspect al lucrurilor, vom observa că există o ambiguitate locală, care se manifestă la nivelul versurilor sau chiar al cuvintelor, și o ambiguitate globală, integrală, care se manifesta la nivelul unui întreg poem sau chiar al întregii opere a unui scriitor. Poeți ca Mallarmé sau Blaga prezintă o ambiguitate manifestată la toate nivelurile, în timp ce la un poet ca Ion Barbu ambiguitățile cu caracter local „se rezolvă" uneori la niveluri globale ale operei sale poetice, unde, printr-un proces de neutralizare a unor opoziții, opera își capătă o anumită univocitate. Este adevărat că analizele întreprinse de Basarab Nicolescu asupra poeziei lui Ion Barbu nu lasă loc unei alegeri din partea cititorului, nu permit nici măcar ambiguități cu caracter local, Basarab Nicolescu înclinînd să atribuie fiecărui vers barbian univocitatea unei teoreme matematice. Ne este însă greu să acordăm această univocitate unui vers ca „Suflete-n pătratul zilei se conjugă", unde chiar omonimia la nivel noțional este o sursă de ambiguitate, deoarece versul poate fi raportat, fie la conjugarea numerelor complexe (pentru care a optat și Basarab Nicolescu), fie la conjugarea diametrelor unei conice, fie, în sfîrșit, la conjugarea la care

Scanned with CamScanner

se referă *Dicționarul limbii române moderne*. Fiecare dintre cele trei accepțiuni (dacă nu și accepțiunea relativă la flexiunea verbală) participă la metaforizarea termenului în discuție, așa încît de la oricare dintre accepțiuni am porni, rezultatul la nivelul întregii poezii este același. Acest proces de rezolvare a ambiguităților pe măsură ce înaintăm spre nivelurile superioare ale operei prezintă un mare interes teoretic și merită să facă obiectul unor investigații ulterioare. Dar gradul de deschidere către cititor rămîne încă mare, fapt confirmat chiar de către Basarab Nicolescu, atunci cînd, în virtutea formației sale de fizician, versul „Să nege, dreaptă, linia ce frîngi" îi evocă imaginea razei luminoase rectilinii ce se curbează în apropierea maselor gravitaționale, versul „De ziuă fînul razelor înșală" îi determină observația că „fasciculul de raze luminoase (înțelese sublimat ca direcții de pătrundere în cunoașterea relativă, deci „înșelătoare") este întîlnit în optică" iar, cu privire la Veghea lui Roderick Usher, invocă intervenția geometriilor neeuclidiene în teoria relativității a lui Einstein. Basarab Nicolescu vine deci cu lectura sa personală a poeziei barbiene, lectură care i se impune cu univocitate. Procesul prin care autorul ajunge la această lectură este atît de bine fixat pe funcția noțională a termenilor utilizați de Ion Barbu, încît univocitatea interpretărilor lui Basarab Nicolescu ni se transmite, într-o anumită măsură, și nouă, celorlalți cititori.

Această logodire a matematicii cu poezia nu este, la Ion Barbu, o simplă chestiune de limbaj și de stil, ci așa cum s-a mai remarcat, una de viziune a lumii. Iată, de pildă, o prezentare a geometriei diferențiale, prezentare în care, ca de obicei la Barbilian, cele mai înalte abstracțiuni își găsesc, prin compensare și printr-o statornică nevoie de echilibru, o reprezentare de o surprinzătoare concretitudine:

„Ca să țineți o idee despre obiectul ramurii acesteia de matematice, închipuiți-vă o tablă mare de zinc. Un soare permanent ar îndoi, încălzind-o, fața de zinc, sub forma unei suprafețe mai complicate".

Geometria diferențială studiază deformările de linii și măsuri într-un rotocol foarte mic din acea suprafață. Lucrurile se prezintă acolo mai simplu. Din studiul acesta *local*, rezultă mai multe consecințe generale pentru suprafața întreagă. Un geometru din Goettingen, Gauss, e iniția-

torul în această știință, căreia Einstein îi împrumută foarte multe rezultate pentru a crea *lumea moluscă*, o lume făcută din relații generale de continuitate, dar cu o înfățișare modificată mereu, de timp („Numerus", vol.5, 1939, caietul 42, p.29).

S-ar părea deci că viziunea matematică și cea poetică erau bine implantate una într-alta, formau o unitate a personalității sale, o unitate de care nici poetul, nici matematicianul nu trebuia să se simtă jenat sau să se rușineze. Și totuși, cel puțin în aparență, lucrurile nu se întîmplau așa. În anii 1945—1961, orice încercare a unui matematician de a discuta cu Dan Barbilian, în incinta Facultății de matematică, despre activitatea sa poetică, era respinsă cu promptitudine de către interlocutor. Uneori, replica era deosebit de dură și cu efecte de durată. Un matematician l-a întrebat odată „cum mai merge cu traducerea din Shakespeare" (era în perioada în care poetul lucra la versiunea românească a piesei *Richard al III-lea*). Barbilian i-a amintit că este „întîi de toate matematician" și a plecat imediat. De atunci, nu i-a mai răspuns niciodată la salut. Dar de obicei, supărarea lui nu ajungea la forme atît de grave, Barbilian mărginindu-se să răspundă că activitatea poetică reprezintă, pentru el, o fază depășită ; uneori, adăuga chiar că regreta această activitate, deoarece cizelarea expresiei poetice este mai puțin interesantă și dătătoare de mai puține satisfacții decît cultivarea algebrei axiomatice, formă supremă a curiozității sale intelectuale. Este foarte greu de stabilit adevăratul sens al acestei atitudini a lui Barbilian. Corespundea ea convingerilor sale intime? Erau preocupările sale poetice răzlețe din acei ani simple reziduuri ale unei activități care-l pasionase în tinerețe? Unele mărturii despre discuții pasionate pe teme literare, pe care Dan Barbilian le ducea în acea vreme cu diverși scriitori nu par să confirme această supoziție. Într-o vreme în care revistele literare nu prea îl aminteau, este de înțeles susceptibilitatea sa în raporturile cu matematicienii. Ar fi vrut probabil ca *alții* să-l întrebe de poezie și *despre altceva* să-l întrebe matematicienii. (Asupra tăcerii lui Ion Barbu a se vedea N. Balotă, „Familia", nr.2, 1968).

Dar susceptibilitatea lui Barbilian nu se manifesta numai în situații de tipul celor menționate mai sus, ci avea un caracter general. Temperament coleric, mereu bănuitor,

Scanned with CamScanner

mereu stăpînit de suspiciune, Barbilian era un om al atitudinilor categorice, radicale, pendulînd mereu între duioşia pînă la lacrimă şi enervarea însoţită de agitarea în aer a bastonului. Acel baston pe seama căruia se făceau multe glume şi în a cărui manipulare se repercutau nuanţat schimbările sale de atitudine. Cîte comentarii se făceau pe seama acestui baston cu prilejul sesiunilor de examene, cînd Barbilian se mînia din pricina studenţilor leneşi, necinstiţi sau incapabili! Dar se întîmpla uneori ca, prins de chestiunea în discuţie, să se angajeze în propriul său comentariu, dînd un calificativ bun sau chiar foarte bun unui student care nu făcea decît să puncteze spusele examinatorului. Natura personalităţii sale îl punea mereu în dificultate în raporturile umane şi-l găsea mereu deficitar în ceea ce priveşte simţul realităţii.

Cercetarea textelor matematice ale lui Barbilian dezvăluie ipostaze noi chiar pentru activitatea sa literară. Facem aici cunoştinţă cu portretistul, cu satiricul, cu evocatorul. Iată, de pildă, un portret al marelui nostru geometru Gheorghe Ţiţeica, căruia i-a fost student şi, apoi, asistent:

„Un om blond, foarte blond, de blondul idilic al stelei de seară sau al ierbei de munţi, în apus. O faţă românească, dar străveche (daco-romană) încoronată de o calviţie venerabilă, semnul climatului special al ideii".

„Smerenia şi pacea luminoasă a acestei figuri (ceva din ortodoxia raţională a stareţului Zosim din *Fraţii Karamazof*) la catedră şi la tablă, se însufleţeşte. Gestul, mai larg, arată rîndurile oştirilor de algebre. Un călugăr-soldat ridicînd Cruciata de semne pentru cauza cea mai adevărată, cea mai importantă, «cum sabia n-a pledat vreodată şi nici trîmbiţa n-a proclamat»".

„Bătălia se desfăşoară albă, hotărîtă, într-un mers de fapt suveran. Ochii profesorului precişi, albaştri, în planul median al amfiteatrului, par materializarea punctelor circulare, de la infinit: organizatori şi absoluţi. Pe cînd faţa se desface pe fondul negru al tablei ca Masca însăşi a geometriei. Ca sfera absolută, neeuclidiană" („Numerus". vol.5, 1939, caietul 42, pp.28—29).

Şi iată o evocare a unei lecţii de geometrie cu Gheorghe Ţiţeica:

„Am avut curiozitatea să gust, într-o atitudine de aşteptare, lecţiile profesorului Ţiţeica. Le-am cunoscut ca nişte clare bătălii. Sub faţa aceasta, mai ales, le iubesc. Însemnă-

tatea acestor lecţii nu-ţi îngăduie însă o prea lungă pasivitate. Scoţi repede hîrtia, creionul şi intri în bătălie. Atunci simţi lîngă tine o mînă sigură de neîntrecut combatant. Aici îndepărtează fierul cu care inerţia somnolenţei voia să te întunece: dincolo arată o potecă sigură în spatele taberei de întuneric; îţi încheie armura slăbită de lovituri şi, din izbîndă în izbîndă, iată, te conduce în cortul bogăţiilor lui Darius: diamantele proprietăţilor geometrice, tăiate după tetraedru, cub, octaedru, icosaedru" („Numerus", vol.5, 1939, caietul 42, p.29).

Neuitată îmi va rămîne conferinţa pe care a ţinut-o Barbilian în 1955, cu prilejul centenarului morţii lui Karl Friedrich Gauss. În amfiteatrul Spiru Haret al Facultăţii de matematică, un public imens l-a ascultat atunci cu respiraţia tăiată, evocînd figura acelui «*Princeps mathematicorum*», considerat de mulţi specialişti cel mai mare matematician al tuturor timpurilor. Barbilian însuşi era vădit emoţionat; întreaga lui fiinţă manifesta o transfigurare ceremonioasă. Iată doar cîteva pasaje din această conferinţă memorabilă, al cărei text a fost publicat ulterior în „Gazeta matematică" (vol.VII, 1955, pp.197—208).

„Un erou, fie al acţiunii sau al meditaţiei, nu ni-l putem reprezenta fără a-i prescrie un cadru. Astfel, pe Alexandru îl evocăm la confinele lumii antice, căzînd sub săgeata partă. Hamlet pe terasa de la Elseneur, întrebînd apele Sundului. Cum trebuie să ni-l zugrăvim pe Gauss? La masa lui de lucru, doborînd cu o energie fără exemplu dificultăţile teoretice sau numerice? Nopţile, lipit de luneta în care se încadrează, rînd pe rînd, micile planete: Ceres sau Palas, descoperite de el prin calcul şi zărite, mai apoi, de astronomii săi? Tablourile sînt veridice, dar nu vorbesc închipuirii, nu tind către mit".

„Pe Gauss al anilor intenşi se cuvine să-l vedem străbătînd, în mantaua lui de ploaie, pustiul Lüneburgului, găzduit pe la morile de vînt, trăind viaţa păstorilor din partea locului, dormind vara somnul lor de plumb, prin ierburi, şi visînd de curbura pămîntului".

Iată o apreciere în spiritul viziunii moderne a operei văzute ca un proces: „Da, virtualităţile din opera lui Gauss au o acţiune mai vie decît achiziţiile sale indiscutabile. Cu marginile ei mişcătoare, această operă e practic infinită. Ea devine. Ne solicită să emulăm cu dînsa". Este aici o viziune lirică asupra matematicii, pentru că acele „virtuali-

Scanned with CamScanner

tăţi" şi „margini mişcătoare" la care se referă Barbilian apropie indiscutabil opera matematică de ambiguitatea infinită şi metamorfoza nelimitată, care fac farmecul operei poetice. Această idee îndrăzneaţă, de mare originalitate (să nu uităm că ea a fost enunţată în 1955), va trebui fără îndoială să facă obiectul unor investigaţii speciale, cu atît mai mult cu cît în ultima vreme şi alţi autori au ajuns să enunţe idei asemănătoare. Astfel, într-o discuţie recentă cu profesorul Jean Pierre Benzécri, de la Universitatea din Paris, acesta mi-a spus: „La langue du mathématicien, comme celle du poète, connaît l'ellipse, la métaphore et elle fourmille d'images, parfois tracées en équations!" (Limba matematicianului, ca şi aceea a poetului, cunoaşte elipsa, metafora şi furnică de imagini, uneori reprezentate prin ecuaţii!). Dar nu este oare limbajul figurat o sursă inepuizabilă de ambiguitate? Poate că, pe măsură ce cercetările asupra limbajului ştiinţific şi limbajului poetic vor progresa, va trebui să renunţăm la ideile atît de înrădăcinate pe care le avem despre ele. Reflecţiile lui Dan Barbilian invită, printre primele în ordine cronologică, la o astfel de revizuire.

Iată, în sfîrşit, evocarea unei călătorii la Goettingen:

„În trecerea mea ultimă prin Goettingen am fost condus să văd odaia în care a murit Gauss. Pregetasem s-o fac mai înainte. E păstrată, aproximativ, în starea în care se afla în acea dimineaţă de 23 februarie, acum 100 de ani. În lumina galbenă, aproape mistică, ce cădea din fereastră, simplicitatea lucrurilor din jur căpăta nu ştiu ce omogeneitate, ce unitate severă. Orice podoabă ar fi fost de neîndurat, o incongruitate şi o pată de stil. Iată jilţul în care a aţipit de veci; aci, gherocul lung, descris de Dedekind, în care apărea studenţilor; mai departe, pupitrul alb, de mesteacăn, pe care supunea adevărul."

„Impresia e copleşitoare."

„Această cameră ce a conţinut, în putere, matematica unui veac întreg, mi-a apărut însăşi materializarea artei neegalate a teoremei („maximum de gînd în minimum de cuprindere") practicată de Gauss."

. . . . .

„Gauss a realizat printre matematicieni un ordin nou, oarecum transfinit de mărime. E net superior unei opere, ea însăşi supremă".

Un amănunt anecdotic colorează episodul publicării articolului despre Gauss. Un redactor al „Gazetei matematice", după ce citise textul conferinței, avu inspirația nefericită de a-i face autorului unele observații stilistice. Fraza incriminată suna astfel:

„Marea aventură a vieții sale a fost măsurarea diferenței de latitudine între Goettingen și Altona".

Pe redactor îl supăra cuvîntul „aventură" (care, de altfel revenea și în altă frază: „Adevăratele aventuri ale acestei vieți, în definitiv cenușii, sînt descoperirile matematice care o înseamnă").

Dar replica lui Barbilian veni categorică: — Pe semne că dumneata nu știi că există și altfel de aventuri decît cele amoroase! Redactorul părăsi repede locul discuției iar articolul apăru fără nici o modificare.

Puțin cunoscută este verva satirică a lui Barbilian. Ea era necruțătoare la examene, ca și la seminarii, în special la adresa studenților. Într-una din lecțiile sale asupra aplicațiilor teoriei lui Galois la demonstrarea imposibilității cvadraturii cercului și trisecțiunii unghiului cu ajutorul riglei și compasului, Barbilian n-a scăpat prilejul de a-și exercita vigoarea polemică la adresa celor care se înverșunează să ignoreze imposibilitatea despre care am vorbit mai sus:

„Astfel, o întreagă categorie de diletanți aparținînd mai tuturor națiunilor și recrutați din cele mai variate cercuri: funcționari de bancă, avocați de provincie, învățători, doctori fără clientelă, profesori de liceu neinformați, se cheltuiește zadarnic în a căuta să rezolve probleme pentru care nu au nici o pregătire, și anume în sensul pozitiv al întrebării, dovedit matematicește de mult ca imposibil. Toți visează să trisecteze unghiul, să cuadreze cercul sau să dubleze altarul lui Apollon din Delos".

„Academiile sînt inundate periodic de «soluțiile lapidare», reduse la cîteva rînduri de mizerabile silogisme, ale unor maniaci".

„Această tenace ginte formează un fel de internațională, în felul filateliștilor, întrețin o bogată corespondență în care se plîng de neînțelegerea științei oficiale și se mîngîie cu justiția posterității. Cunoștințele lor în matematice nu trec, în cele mai bune cazuri, de nivelul școalei secundare. Ceea ce îi unește mai ales, este oroarea de a se informa și un anume arsenal de argumente iluministe".

Scanned with CamScanner

„La Congresul matematic din Oslo, din 1936, am putut vedea de aproape un trisector al unghiului. Era îmbrăcat aproape preoţeşte cu un fel de sutană, şi purta bocanci ghintuiţi, de alpinist. Un păr incult îi cădea pe umeri. Trecea hieratic şi îndepărtat printre congresişti, cu toate semnele unui exil consimţit".

„Am întrebat pe un coleg norvegian, cine e acel straniu personaj. «Îl cheamă Larssen. A împărţit unghiul în trei, cu compasul, şi speră, dacă inspiraţia îl va susţine, că îl va putea împărţi şi în patru»." (*Curs de algebră axiomatică*, partea a III-a, Ed. Facultăţii de ştiinţe, Bucureşti, 1945—1946, pp.398—399).

Scriind despre alte personalităţi, Dan Barbilian s-a zugrăvit de multe ori pe sine. Reflecţiile sale asupra conciziei şi ermetismului lui Gauss sînt tot atîtea explicaţii ale aşa-numitului ermetism al poeziei barbiene. Teorema, formă supremă a gîndirii matematice, este văzută de către Gauss, prin pana lui Barbilian, „ca un text august, ca o inscripţie al cărei laconism e însăşi garanţia durabilităţii ei" („Gazeta matematică", vol.7, 1955, nr.5, p.202). Despre Pfaff, profesorul lui Gauss, Barbilian observă că a intervenit, în timp ce Gauss îşi redacta teza, „pentru a determina pe Gauss să renunţe la acel ermetism al său, ce se făcea de pe atunci simţit. Gauss n-a cedat sfaturilor lui Pfaff, sub cuvînt că extrema lui concizie nu e datorită pregetului de a dezvolta argumentele, ci unor operaţii dificile, de eliminare a tot ceea ce este accesoriu". Barbilian caracterizează astfel pe Gauss: „maximum de gînd în minimum de cuprindere".

Oare nu sînt valabile toate aceste aprecieri şi pentru Barbilian şi, mai mult, chiar pentru Ion Barbu? Nu este o poezie oarecare din ciclul *Joc secund* „ca un text august, ca o inscripţie al cărei laconism este însăşi garanţia durabilităţii ei"? Nu simţim, dindărătul lui Pfaff, puzderia de critici care n-au înţeles sensul profund al poeziei lui Ion Barbu, acuzîndu-l pe nedrept de obscuritate sau de joc gratuit de cuvinte?

Nu este vorba aici numai de simplul deziderat al conciziei, ci de ceva mult mai adînc. Barbilian a intuit funcţia euristică a limbajului, funcţie care se manifestă cu atît mai eficient cu cît limbajul este mai sugestiv şi mai economic. Nu vorbea Barbilian despre „rigoarea stilistică şi logică" a scrierilor lui Gauss, rigoare care „are într-însă ceva nemi-

los, inexorabil. Nu mai puţin fascinator" („Numerus", vol.7, 1955, nr.5, p.202)? Parafrazîndu-l pe Poincaré, care, referindu-se la matematică, observa că o notaţie bună echivalează cu o descoperire, putem spune că o expresie lirică destul de densă permite detectarea unor noi şi necunoscute zone ale sensibilităţii omeneşti. Întocmai ca şi Gauss, care „n-a publicat decît o fracţiune din ceea ce a gîndit de-a lungul unei vieţi întregi", deoarece... „sigiliul său personal închipuia un pom cu puţine roade", iar dedesubt cuvintele *Pauca sed matura*, Ion Barbu, după cum se ştie, a scris puţine poezii, este poate cel mai puţin productiv dintre marii noştri poeţi, tocmai pentru că-şi impunea acea rigoare nemiloasă pe care o întrezărea în scrierile lui Gauss.

*

L-am întîlnit, pentru ultima oară, pe Dan Barbilian, în iarna anului 1960—1961, în incinta bibliotecii Facultăţii de matematică-mecanică. Nu-l mai văzusem de mult, se afla după o lungă absenţă de la universitate, datorită bolii. Nu era restabilit, se afla doar într-un moment de uşoară ameliorare a stării sale; dealtfel, în scurt timp boala sa s-a agravat şi nu şi-a mai revenit niciodată. Mi-a spus: „Am aflat de la Sandu Rosetti (*n.n.*: este vorba de acad. Alexandru Rosetti) că te ocupi de traducerea automată, şi vreţi oare să-l traduceţi şi pe Homer"? Nu, i-am răspuns, liniştindu-l, este vorba deocamdată numai de texte ştiinţifice. „Ei, tot e bine că v-aţi oprit aici!" mi-a replicat, strîngîndu-mi mîna pentru ultima oară.

Dar tot Dan Barbilian este acela care, încă în 1943, releva pentru prima oară faptul că la Hilbert „se ridica nouă, covîrşitoare prin originalitatea ei, o idee insolită, cum ar fi, de pildă, afirmarea structurii de inel a limbajului în raport cu operaţiile sintaxei, de unde încheierea asupra anteriorităţii acestuia faţă de logică şi aritmetică" (vezi articolul despre David Hilbert publicat în „Numerus" în 1943, cu prilejul morţii marelui matematician german).

Scriind aceste rînduri, bănuia oare Barbilian că anticipa, împreună cu Hilbert, un domeniu nou de aplicare a matematicii, acela al lingvisticii algebrice? Într-adevăr, unul dintre creatorii lingvisticii algebrice, Noam Chomsky, s-a inspirat, în elaborarea conceptului său de gramatică generativă, din teoria sistemelor formale, aşa cum a fost

ea inițiată de către Hilbert. Arhitectura unui sistem formal se regăsește, în liniile sale esențiale, în arhitectura unei gramatici generative. Să mai observăm faptul că structura de inel a limbajului în raport cu operațiile sintaxei a fost exploatată în mod sistematic de către un algebrist ca Joachim Lambek, în elaborarea unui calcul al tipurilor sintactice, punct de plecare în construirea diferitelor tipuri de gramatici categoriale (a se vedea, pentru toate aceste fapte, S. Marcus, E. Nicolau, S. Stati, *Introducere în lingvistica matematică*, Ed. Științifică, București, 1966, cap. III, și mai cu seamă, S. Marcus, *Algebraic Linguistics*, Academic Press, 1967, cap.III).

*

Exegeza operei poetice a lui Ion Barbu a căpătat în anii din urmă o mare amploare. Nu același lucru se poate spune despre exegeza textelor matematice ale lui Dan Barbilian, în ciuda faptului că o mare parte din aceste texte sînt deja strînse în volum. Nu este vorba doar de o înțelegere paralelă a poetului și a matematicianului, ci și de o înțelegere încrucișată, care are ambiția să identifice pe poet în textele de matematică și pe matematician în textele poetice. Dacă despre acesta din urmă s-a mai scris cîte ceva, despre prezența poetului Ion Barbu în țesătura textelor matematice ale lui Dan Barbilian trebuie să recunoaștem că știm încă foarte puțin.

Există, la unii exegeți ai acestei uriașe personalități, tendința, ce-i drept nemărturisită, de a acredita impresia că Ion Barbu și Dan Barbilian au existat doar întîmplător în una și aceeași persoană, influența unuia asupra celuilalt fiind cu totul superficială. Sîntem însă convinși că, prin dezvoltarea unei formații cît mai interdisciplinare a noilor generații de intelectuali, cultura românească va primi fără prea mare întîrziere darul pe care de mult îl merită: o lectură unitară, a operei marelui nostru matematician și poet.

MATILA C. GHYKA

Nepot al ultimului domnitor al Moldovei (Grigore Ghica), Matila Ghyka este marcat încă din tinerețe de o formație interdisciplinară, fiind în același timp inginer și licențiat în litere și în drept. Lunga sa activitate în diplomație i-a dat răgazul necesar pentru a acumula o vastă cultură și pentru a edifica o operă de pionierat în domeniul esteticii, prin urmărirea sistematică a modului în care operele de artă se supun, ca și natura, unor regularități susceptibile de o descriere matematică, sugerînd unele corespondențe profunde între gîndirea științifică și cea artistică, ca și cum una s-ar proiecta în cealaltă.

Înseși titlurile operelor lui Matila Ghyka, dintre care amintim aici doar o parte, sînt semnificative: *Esthétique des proportions dans la nature et dans les arts* (Collection „La pensée contemporaine", N.R.F., Paris, 1926), *Le nombre d'or. Rites et rythmes pythagoriciens dans le développement de la civilisation occidentale,* tome I; *Les Rythmes,* tome II: *Les Rites* (N.R.F., Editions de la Nouvelle Revue Française, Librairie Gallimard, Paris, 1931). Prin aceste opere, Matila Ghyka și-a devansat epoca, deoarece abia dezvoltarea teoriei informației și a domeniilor interdisciplinare, caracteristică ultimelor două decenii, avea să ofere cadrul adecvat pentru înțelegerea diferitelor restricții care guvernează aspectele combinatorii în structura operelor de artă. Profesor de estetică în Statele Unite ale Americii, în timpul celui de-al doilea război mondial, iar ulterior profesor de estetică la Universitatea din Londra, perioadă în care elaborează și publică *Philosophie et mystique du nombre,* Matila Ghyka moare în 1965, la Londra, dar acest eveniment trece neobservat la noi, cum aproape neobservată, în mediile intelectuale românești, trecuse întreaga sa operă. (Să semnalăm totuși că Petru Comarnescu a reacționat prompt și favorabil la apariția cărții lui Ghyka din 1926, printr-un articol publicat în 1927 în „Viața românească").

Scanned with CamScanner

Cu prilejul morţii sale, ziarul francez „Le Monde" consacră o relatare destul de amplă, care pentru noi a constituit şansa de a afla despre existenţa lui Matila Ghyka. În anii imediat următori, am căutat să ne apropiem de opera sa, dar nu am identificat în bibliotecile noastre decît o parte a ei. Prin diferite expuneri făcute în acei ani, am căutat să atragem atenţia asupra acestei personalităţi importante a culturii noastre, a cărei operă nu a fost tradusă în româneşte, nici măcar prin unele selecţii mai reprezentative. În toamna lui 1971, cu prilejul unei conferinţe ţinute la „Columbia University" din New York, avînd ca temă tocmai structurile matematice în artă, am avut prilejul să fac cunoştinţă cu Roderich Ghyka, fiul lui Matila Ghyka, de la care am aflat cîteva lucruri importante despre viaţa şi opera tatălui său. Ascensiunea fascismului în România l-a surprins pe Matila Ghyka la Londra, unde era ambasadorul ţării noastre. Şi-a dat imediat demisia din această funcţie, în semn de protest contra fascizării ţării (oricum ar fi fost demis de către legionari şi, ulterior, de către Antonescu, fiind cunoscut pentru atitudinea sa antifascistă), hotărînd să nu se mai întoarcă în ţară. Opera lui Matila Ghyka este mult mai vastă decît ceea ce am semnalat mai sus ; Roderich Ghyka ne-a promis că, împreună cu sora sa, Maureen Ghyka (care locuieşte la Paris), va pune la dispoziţie toate informaţiile de care dispune, atunci cînd vom dori să-l reedităm.

Alături de Servien, Matila Ghyka este un pionier al teoriei matematice a ritmului. Ghyka distinge ritmurile ireversibile, care se dezvoltă în durată (muzică, poezie) şi sînt emanaţii directe ale experienţei trăite, de ritmurile spaţiului (arhitectură şi plastică), domeniu al reversibilului şi al continuului, al proporţiei propriu-zise, în special pentru ciclul creator pe care Ghyka îl numeşte „mediteranean", unde se manifestă într-un mod caracteristic sensul proporţiei şi al unui ritm spaţial bazat pe înlănţuiri şi combinări de proporţii, controlate toate de anumite regularităţi matematice. Ritmurile ireversibile sînt studiate cu ajutorul unor notaţii în cadrul cărora, pe baza unor şiruri simple de numere, sînt reprezentate ritmurile care reflectă ondulaţii afective paralele cu cele două cadenţe fiziologice cu trame numărabile : trama fundamentală a bătăilor inimii şi unda respiratorie, reflectare şi mai directă a fluxului afectiv. Această explicitare a unor structuri ritmice dintre cele mai variate, cu ajutorul unor procedee matematice

uniforme, aşază într-o aceeaşi serie operele ciclului mediteranean (Egiptul, Grecia, Bizanţul, epoca gotică, Renaşterea), prin consecvenţa cu care ele se supun unei geometrii impuse de morfologia formelor vii şi de legile creşterii biologice.

Cea mai importantă regularitate pe care o studiază Matila Ghyka este aceea definită de „proporţia de aur" (egală cu $(1+\sqrt{5})/2$) şi obţinută, între altele, ca limita, pentru $n \to \infty$, a raportului dintre termenul de rang n şi cel de rang $n-1$ din şirul lui Fibonacci 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13,..., unde fiecare termen de rang > 2 este suma celor doi termeni imediat precedenţi. Dacă notăm cu F_n termenul de rang n din şirul lui Fibonacci, se constată că

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$$

unde, după cum se observă, în membrul al doilea apare puterea a n-a a proporţiei de aur. Este interesant să constatăm aici insistenţa cu care apare numărul $\sqrt{5}$, acelaşi care constituie cea mai bună valoare posibilă în teorema lui A. Hurwitz („Mathematische Annalen", 1891), conform căreia, pentru orice număr iraţional x, inegalitatea

$$\left|x - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{\sqrt{5}q^2}$$

este satisfăcută pentru o infinitate de perechi de numere întregi p şi $q(q > 0)$. Împărţind un segment de dreaptă în două părţi neegale, în aşa fel încît raportul dintre întregul segment şi partea mai mare să fie egal cu raportul dintre partea mai mare şi partea mai mică, se constată că raportul în cauză este rădăcina pozitivă a ecuaţiei $1 + x = x^2$, adică tocmai numărul de aur. Cunoscut încă din antichitate, acest număr exprimă unele proporţii fundamentale ale corpului uman. Matila Ghyka arată că, în opoziţie cu simetria de tip hexagonal, expresie a unui echilibru inert şi simplist, care stă la baza lumii minerale, lumea vegetală şi animală este legată de simetria pentagonală definită de numărul de aur, simetrie care dă naştere unei periodicităţi dinamice şi structurează pulsaţiile crescînde ale unei spirale logaritmice. Jocul subtil al proporţiilor şi asimetriilor corpului omenesc, exprimat cu fidelitate prin numărul de

aur, era la greci un model pentru formele arhitecturale. Cînd vorbeşte despre coloane, Vitruviu compară proporţiile coloanei dorice cu cele ale corpului masculin, în timp ce proporţiile coloanei ionice îi evocă corpul graţios al femeii. Dar nu numai formele arhitecturale, ci şi cele ale picturii şi ale muzicii sînt, de multe ori, guvernate de proporţia de aur. Teoria pitagoreică a armoniei muzicale este fondată pe studiul proporţiilor. În tratatul *De Divina Proportione* al lui Fra Luca Pacioli di Borgo, din secolul al XV-lea, consacrat numărului de aur, numit de astă dată „proporţia divină", numeroase ilustraţii, datorite lui Leonardo da Vinci, conţin proporţii date de acelaşi număr. Deosebit de interesantă este prezenţa numărului de aur în lumea vegetală, prezenţă detectată prima oară de Kepler. Ulterior, Wiener a aprofundat rolul numărului de aur în domeniul filotaxiei, studiind dispoziţia ramurilor, a frunzelor şi a seminţelor. Wiener a observat că unghiul care apare în expresia ecartului unghiular constant al ramurilor conţine pătratul numărului de aur. Acest unghi se obţine ca soluţie a problemei expunerii optime a frunzelor la lumina verticală. Iată deci că fenomene dintre cele mai variate sînt, cum se exprimă Paul Valéry în a sa *Cantique des colonnes,* fiice ale numărului de aur. Expresie a analogiei profunde dintre fenomene şi a unităţii lumii materiale, numărul de aur rămîne în centrul atenţiei cercetătorilor. În urmă cu peste douăzeci de ani, Paul Montel prezentase, în „Revue d'esthétique", o sinteză a proprietăţilor numărului de aur, proprietăţi de natură să convingă orice matematician de situaţia sa singulară cu totul remarcabilă. Posibilitatea de a reprezenta numărul de aur prin fracţia continuă infinită

$$1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\dots}}}$$

fracţie care nu foloseşte decît cifra 1, conferă acestui număr o importanţă deosebită în teoria numerelor. Este de asemenea interesant faptul că progresia geometrică infinită avînd ca prim termen pe 1 şi ca raţie numărul de aur este şi ea un şir al lui Fibonacci, cu alte cuvinte, notînd cu φ numărul de aur, avem $\varphi^{n-1}+\varphi^{n}=\varphi^{n+1}$ pentru orice

$n > 1$, în timp ce, aşa cum am observat, $1 + \varphi = \varphi^2$. Această progresie geometrică este considerată de Ghyka (p.129 din *Le nombre d'or*, tome 2) drept modelul, paradigma ideală a creşterii organice, în raport cu care şirul iniţial al lui Fibonacci 1, 1, 2, 3, 5, 8, . . . este doar o aproximare practică (deoarece termenii ei sînt numere întregi) realizată în natură. Dealtfel, trebuie menţionat că şirul lui Fibonacci a fost descoperit în 1202 de către Leonardo din Pisa, tot în studiul unei probleme de creştere biologică: modul de înmulţire a iepurilor. Deci numărul de aur, cunoscut încă din antichitate, i-a precedat cu multe sute de ani.

Numărul de aur pare să exprime un deziderat organic al naturii şi al omului, unul dintre acele elemente pe care probabil omul le are în comun cu orice fiinţă cugetătoare din univers. Acele mesaje laconice pe care pămîntenii le lansează către nişte posibili locuitori ai altor planete sau corpuri cereşti ar trebui poate să conţină, alături de π şi de numerele prime, şi numărul de aur.

Rezultate disparate privind prezenţa — deliberată sau nu — a proporţiei de aur în marile opere ale naturii şi ale artei există deci de multe secole. Matila Ghyka este primul care realizează o sinteză de o înaltă capacitate explicativă a acestor fenomene. De exemplu, analizînd traseele de regulare (*les «tracés régulateurs»*) deosebit de riguroase ale planurilor templelor egiptene şi greceşti şi ale bisericilor gotice, el arată că toate se inserează ca variante ale aceleiaşi „teme", aceea a numărului de aur, temă a pulsaţiei vieţii, pe care dealtfel Renaşterea o regăseşte sub egida spirituală a lui Platon, considerat de Ghyka un gînditor prin excelenţă mediteranean. Pentagrama, semnul geometric al numărului de aur, emblemă a armoniei şi a sănătăţii la pitagoricieni, s-a transmis, ca atare sau prin unele variante, de-a lungul epocilor ulterioare. Ghyka urmăreşte cu atenţie traseele acestei evoluţii. Desigur, propune uneori interpretări pe care astăzi nu le mai putem accepta, dar rămîne deosebit de actual prin consecvenţa cu care pune în evidenţă capacitatea explicativă a structurilor numerice în opera de artă. În perspectiva actuală, trebuie să observăm că ceea ce lui Ghyka i-a apărut ca o aritmetică bizară, care aducea pe primul plan anumite numere în dauna altora, este de fapt expresia unor procese recurente cu o infinitate de etape (a se vedea legătura profundă a

Scanned with CamScanner

numărului de aur cu şirul lui Fibonacci şi cu procesele de aproximare a numerelor reale), procese care sînt modul de activitate al unor adevărate maşini generative care definesc creativitatea naturii sau a omului. În acelaşi timp, regularităţile aritmetice pe care Ghyka le dezvăluie a fi atît de sistematice în natură ca şi în artă sînt doar unul din modurile de manifestare a tendinţelor antientropice, de creştere a energiei informaţionale (în sensul lui Onicescu). Natura şi arta se supun unor restricţii de o mare severitate, dar aceste restricţii nu sînt vizibile cu ochiul liber. Numai învăţînd să le cunoaştem putem supune, la rîndul nostru, materia, limbajul pe care-l folosim, fie că este vorba de limbajul articulat al vorbirii obişnuite, fie că avem în vedere limbajele pe care omul le construieşte în mod deliberat, în ştiinţă sau în artă. Aceasta este lecţia gîndirii lui Ghyka, pe care întreaga dezvoltare ulterioară a gîndirii ştiinţifice şi a celei artistice o confirmă. Tocmai aici se află motivarea posibilităţilor pe care le avem astăzi de a simula la calculator regularităţile operelor de artă şi chiar procesele de creaţie artistică, în măsura în care ele revin la procese recurente pe care le putem explicita şi descrie algoritmic. Putem spune fără exagerare că dacă astăzi ştim ce trebuie să înţelegem, nu doar la modul metaforic, prin gramatica unei opere de arhitectură, a unui menuet, a unei structuri narative, aceasta se datorează în bună măsură şi clarificărilor aduse de opera lui Matila Ghyka. Este interesant că şi acum, ca şi pe vremea lui Ghyka, unii savanţi încearcă să găsească o raţiune şi o interpretare de ordin psihologic a regularităţilor care străbat opera de artă. Dacă Ghyka se referea la principiul adaptării optime la mediu, ca factor care ar reglementa un anumit simbolism al formelor şi proporţiilor (în concordanţă, de-altfel, şi cu unii autori de mai tîrziu, ca R. Arnheim), astăzi mecanismele generative ale operelor de artă sînt raportate la anumite ipoteze privind competenţa şi creativitatea artistică şi modul de lucru al creierului uman. Modernitatea lui Ghyka se manifestă şi aici printr-o poziţie apropiată de cea contemporană; chiar dacă nu a intuit viziunea generativă actuală, Ghyka a adoptat un punct de vedere funcţional, care surprinde dinamica operei de artă ca un proces de creştere. Structurile cristaline, spiralele seminţelor de floarea-soarelui şi ale unor cochilii, precum şi alte procese de creştere biologică îi sugerează lui Ghyka regulile

creşterii armonioase. Este foarte curios că nu am găsit în opera lui Ghyka, cel puţin în partea care ne-a fost accesibilă, nici o referire la un autor cu care este totuşi atît de înrudit: D'Arcy Thompson, autorul clasicei lucrări *On growth and form* apărută în 1917, a cărei considerabilă actualitate a determinat republicarea ei (într-o versiune prescurtată) în 1961, de către Cambridge University Press, Oxford. Acum însă, noile sinteze vin să repare aceste omisiuni. Avem în vedere în primul rînd cartea lui René Huyghe *Formes et forces. De l'atome à Rembrandt* (Flammarion, Paris, 1971), care restituie istoriei culturii apropierea acestor două spirite atît de vecine: D'Arcy Thompson şi Matila Ghyka. Insistăm cu deosebire asupra capitolului VII al cărţii lui Huyghe, capitol dedicat formelor creşterii, în cadrul căruia o întreagă secţiune este dedicată numărului de aur, insistîndu-se asupra creşterilor în spirală, în natura biologică şi în artă. Huyghe ajunge la concluzia că secţiunea de aur este soluţia la care viaţa în mod inevitabil trebuia să ajungă „pour répondre à sa double exigence de faire persévérer dans sa personalité l'être qu'elle anime et de lui ouvrir pourtant la possibilité de se transformer en s'accroissant" (loc. cit., p.289). Tendinţei de mistificare pe care Ghyka a încercat s-o imprime interpretărilor date simbolismului formelor şi proporţiilor (Kabbala, societăţi secrete etc.), tendinţă care nu este lipsită de unele capcane, pe care le cultivă cu predilecţie, şi în zilele noastre, unele societăţi şi publicaţii (a se vedea, de exemplu, revista americană „Scripta Mathematica"), Huyghe îi opune o demistificare: „La section d'or ne fait que répondre *intellectuellement* à une nécessité que la vie ne pouvait manquer de satisfaire *en fait*. Il est donc essentiel de démystifier une proportion que la pente au rêve et à l'insolite de l'imagination humaine a voulu doter d'un pouvoir occulte qui n'a que trop donné prétexte à des délires plus ou moins ésotériques" (loc. cit., p.289). Huyghe consideră că interpretările cvasimistice ale secţiunii de aur au făcut adevărate ravagii în istoria artei. Trebuie să recunoaştem că, în special prin unele din ultimele sale scrieri, Ghyka nu este străin de acest fenomen, dar contribuţiile valabile din opera sa nu pot fi umbrite de aceste manifestări totuşi minore. Într-un paragraf de un considerabil interes teoretic (*Du dédoublement de la cellule à l'esthétique*, loc. cit., pp.289–296), Huyghe arată în ce sens secţiunea de aur şi toate fenomenele

similare trebuie să fie utilizate în arta contemporană. Huyghe observă că omul transformă în inițiativă ceea ce, în natură, nu este decît consecința inevitabilă a datelor problemei. Încercăm să regăsim, prin mijloace elaborate, ceea ce viața este obligată să obțină pe o cale naturală. De exemplu, în arhitectură totul se petrece ca și cum arhitectura „artificială" ar tinde să regăsească, prin constrîngerile pe care i le impune omul, unitatea pe care arhitectura naturii o dobîndește din mecanismele cele mai esențiale ale vieții, în primul rînd din procesele de creștere. Un arhitect ca André Hermant (autor al studiului *Croissance et Topologie*) identifică în realitate ceea ce el numește «*des tracés résultants*» trasee pe care le regăsește prin calcul orice arhitect, în arhitectura sa „artificială", sub forma acelor «*tracés régulateurs*» la care se referea și Ghyka. În acest spirit, mari artiști ai secolului nostru ca sculptorul Étienne Beotthy în *Dans rus* și pictorul Piet Mondrian în *Broadway boogie-woogie* (a se vedea și studiul corespunzător al lui Ch. Bouleau, în „Charpentes", Éditions du Seuil, 1961) au reactualizat numărul de aur (a se vedea și Huyghe, loc. cit., p.291). În studiul său *L'Architecture des plantes* (în „Techniques et Architecture", Paris, 1947), André Hermant stabilește o corelație între diferite moduri de creștere: ramificarea, seriile, dispozitivele în spirală etc., interpretîndu-le ca etape logice ale unui proces al cărui punct de plecare îl constituie faptul elementar al dedublării celulei (fenomen numit *mitoză*). În continuare, Hermant arată că acest proces al dedublării este punctul de plecare al unui fenomen de creștere care poate fi descris riguros cu ajutorul unor transformări topologice capabile să explice, de o manieră uniformă, un mare număr de procese de creștere din lumea vegetală și animală, procese care au ca numitor comun, așa cum arăta Ghyka (pe care Huyghe îl menționează), numărul de aur, capabil să exprime unitatea în diversitate. (Se are aici în vedere faptul că o creștere aditivă descrisă printr-un șir al lui Fibonacci generează o creștere în progresie geometrică — avînd ca rație numărul de aur — progresie care este de asemenea un șir al lui Fibonacci).

Dar încă înainte de aceste considerații, Huyghe, după ce amintește contribuția esențială a biologului D'Arcy Wentworth Thompson, din 1917 (de observat că versiunea prescurtată, din 1961, a cărții sale, versiune datorită lui John

Tyler Donner, prezintă, față de versiunea originală, avantajul de a fi pusă la punct cu progresele științifice la zi; acest proces de aducere la zi este continuat și în ediția din 1966 a aceleiași cărți), contribuție care a fixat baza științifică a tuturor proceselor de creștere a formelor, atît în lumea minerală, cît și în cea vegetală și animală, trece imediat la contribuția (pe care o califică „de mare răsunet") lui Matila C. Ghyka din 1926, asupra căruia enunță o judecată critică pe care sîntem datori s-o examinăm aici: „L'auteur a été entraîné dans un plaidoyer quelque peu forcé en faveur de la section d'or, dont on sait qu'elle a beaucoup agité et continue d'agiter les esprits. Sans doute même a-t-il contribué à lui donner l'importance excessive qu'elle a prise pour certains, que travaillait, comme il n'arrive que trop de nos jours, le désir de concilier le goût du merveilleux et l'apparat savant. Du moins a-t-il eu le mérite de ramasser de façon frappante les lois scientifiques qui expliquent le mieux la différence séparant les formes organiques des formes inorganiques, — l'équilibre cristallin, naturel à la matière, de la poussée, propre à la croissance de la vie". (Huyghe, op. cit., p.264). La ce oare s-ar putea referi caracterul oarecum forțat al pledoariei lui Ghyka pentru numărul de aur? În nici un caz la universalitatea acestui număr, deoarece Huyghe însuși o recunoaște, argumentînd-o cu mijloace noi, topologice, care nu-i erau accesibile lui Ghyka (am reprodus mai sus esența argumentării lui Huyghe; pentru detalii, a se vedea întregul capitol VII din cartea lui Huyghe și, în special pp.289—296). Caracterul forțat al pledoariei lui Ghyka nu se poate referi decît la simbolismul atribuit uneori de către acesta secțiunii de aur și altor proporții pitagoreice, simbolism legat de o geometrie esoterică, de magie, societăți secrete și masonice, alchimie, kabbală, francmasonerie, interpretări mistice (în special în volumul al doilea din *Le nombre d'or* și în *Philosophie et mystique du nombre*); am văzut dealtfel, mai sus, că Huyghe demistifică numărul de aur, fără ca prin aceasta să-i reducă importanța. Acest proces binevenit de demistificare a unor regularități ale naturii și ale artei nu poate totuși ascunde faptul că mistica numerelor își are o întreagă istorie, care nu este lipsită uneori de semnificații sociale, estetice. Urmărind această istorie — este adevărat, nu cu detașarea de care sîntem capabili astăzi — Ghyka sintetizează o evoluție milenară, care trebuie cunoscută. În ace-

Scanned with CamScanner

laşi timp, recunoaşterea, în 1971, de către o personalitate ca aceea a lui Huyghe, a clarificărilor pe care Ghyka le-a adus în ceea ce priveşte structura proceselor de creştere în lumea organică (în opoziţie cu cele din lumea anorganică) îl situează pe Ghyka drept unul dintre cei mai importanţi continuatori ai lui D'Arcy Thompson, care, la rîndul său, este autorul primei viziuni moderne a proceselor de creştere a formelor. Tot Huyghe este cel care atrage atenţia asupra convergenţei punctelor de vedere ale lui Ghyka şi D'Arcy Thompson în ceea ce priveşte problema entropiei (Huyghe, op.cit., pp.387–388).

Am dori să mai menţionăm încă cel puţin patru cărţi monumentale, care pot prilejui o reevaluare a contribuţiilor lui Ghyka în contextul D'Arcy Thompson-Ghyka-Huyghe: cartea lui Hermann Weyl (*Symmetry*, Princeton University Press, 1952; versiune românească, Ed. Ştiinţifică, Bucureşti, 1966), cartea lui François Jacob (*La logique du vivant. Une histoire de l'hérédité*, Editions Gallimard, 1970; versiune românească, Editura enciclopedică română, Bucureşti, 1972), cartea lui Jacques Monod (*Le hasard et la nécessité. Essai sur la philosophie naturelle de la biologie moderne*, Editions du Seuil, Paris, 1970) şi cartea lui René Thom (*Stabilité structurelle et morphogénèse. Essai d'une théorie générale des modèles*, W. A. Benjamin, Inc., Advanced Book Program, Reading, Massachusetts, 1972; Second Printing with corrections, February 1973). La acestea trebuie, evident, să adăugăm anumite lucrări de estetică şi teoria artei, cum ar fi cele ale lui Rudolf Arnheim (*Art and visual perception*, London, 1956; *Gestalt psychology and artistic form*, „Aspects of form", Bloomington, 1961), cele de estetică informaţională ale lui Abraham Moles (*Théorie de l'information et perception esthétique*, Flammarion, Paris, 1958; *Art et ordinateur*, Casterman, Paris, 1971, versiune românească, Ed. Meridiane, 1974), ale lui Max Bense (dintre care menţionăm aici *Aesthetica-Einführung in die neue Ästhetik*, Baden-Baden, 1965) şi a lui Siegfried Maser (*Numerische Ästhetik*, Karl Krämer Verlag, Stuttgart/Bern, 1970, 2. Auflage, 1971) pe linia contribuţiilor mai vechi ale unui contemporan al lui Matila Ghyka, G. D. Birkhoff, pe care în mod surprinzător se pare că Ghyka îl ignoră (cel puţin în acea parte a operei sale care ne-a fost accesibilă), în ciuda unei apropieri evidente de viziune, precum şi lucrările privind legăturile artei cu ciber-

netica, de tipul celei editate de către Jasia Reichardt, *Cybernetics, Art and Ideas* (New York Graphic Society Ltd., Greenwich, Connecticut, 1971). Nu am avut posibilitatea să controlăm vasta operă de estetică matematică a lui G. D. Birkhoff, pentru a vedea în ce măsură s-a sesizat acesta de contribuţiile lui Ghyka. Vom mai menţiona, în cadrul esteticii informaţionale, contribuţiile cuprinse în volumul *Estetică, informare, programare*, antologie, prefaţă şi note de Victor Ernest Maşek, Ed. Ştiinţifică, Bucureşti, 1972, şi cele din cartea lui V. E. Maşek (*Artă şi matematică. Introducere în estetica informaţională*, Ed. Politică, Bucureşti, 1972). În această din urmă lucrare sînt discutate doar în mod sumar unele idei ale lui Ghyka şi Servien, dar întreaga carte oferă o interesantă perspectivă filozofică de estetică informaţională, cu o discuţie destul de amănunţită şi pertinentă a rolului calculatoarelor electronice în această ordine de idei, în raport cu care atît opera lui Servien, cît şi aceea a lui Ghyka îşi dezvăluie valenţe noi. În sfîrşit, am mai adăuga ciclul lucrărilor de semiotică inaugurate prin opera clasică a lui C. S. Peirce.

Toate aceste publicaţii ulterioare operei lui Ghyka sînt tot atîtea oglinzi care dau imagini — replici dintre cele mai variate ale ideilor teoreticianului numărului de aur. Aceste replici urmează însă să fie explicitate, deoarece majoritatea lucrărilor menţionate nu conţin referinţe explicite la opera lui Matila Ghyka. Acest efort de explicitare, important nu doar din punctul de vedere al unei evaluări contemporane a operei lui Ghyka, ci şi din punctul de vedere al evoluţiei generale a ideilor în domeniul evoluţiei formelor naturale şi artistice, nu poate veni din partea unui singur autor, ci va fi rodul cercetărilor conjugate ale unor competenţe interdisciplinare de cele mai diferite orientări. Va trebui, de exemplu, să se stabilească în ce fel intuiţiile topologice ale lui Huyghe, care vin într-un mod atît de neaşteptat în întîmpinarea proceselor de tip Fibonacci caracteristice viziunii lui Ghyka, în ce fel deci reprezentări topologice la care se referă Huyghe premerg ideile lui René Thom, care preconizează o teorie unitară şi globală a evoluţiei formelor, bazată pe conceptele topologiei diferenţiale (varietăţi diferenţiabile, cîmpuri de vectori, sisteme dinamice). Thom se revendică de la un precursor ca D'Arcy Thompson, dar de la acesta din urmă la cel dintîi există mai multe trasee şi aproape toate trec prin Ghyka. Este

de asemenea important faptul că viziunea lui Thom include atît mişcarea biologică, cît şi aceea a gîndirii şi limbajului, extinzînd astfel considerabil cadrul în care se situa D'Arcy Thompson, dar raliindu-se în acest fel, dintr-o direcţie nouă, la viziunea lui Ghyka şi la aceea a lui Huyghe, aceştia din urmă dînd o slabă atenţie aspectelor de limbaj, dar o deosebită atenţie gîndirii plastice.

Interesant este şi traseul urmat de Hermann Weyl care, prin referirile la opera lui George David Birkhoff şi la structurile de simetrie ale marilor opere de artă, trece prin chiar inima preocupărilor lui Ghyka (la care figurile şi corpurile sînt considerate tocmai în funcţie de proprietăţile lor de simetrie), fără a-l menţiona totuşi vreodată pe acesta. Weyl îşi distribuie atenţia între fenomenele de simetrie ale structurilor cristaline şi cele care apar în lumea organică, întocmai cum Ghyka era preocupat de regularităţile din regnul mineral, ca şi de cele din regnul vegetal şi cel animal. Cochiliile şi formele elicoidale care stau în atenţia lui Weyl amintesc (pînă şi prin figurile care le ilustrează) de regularităţile dominate de şirurile lui Fibonacci şi de proporţia de aur care-l obsedau pe Ghyka. Dar atunci cînd este vorba de a se face joncţiunea cu cercetările anterioare pe această temă, Weyl nu trimite la reprezentul lor cel mai calificat, adică la Ghyka, ci la J. Hambidge, a cărui lucrare *Dynamic symmetry* (pe care dealtfel o menţionează şi Ghyka) conţine la pp.146—157 observaţiile matematicianului R. C. Archibald asupra spiralei logaritmice, asupra numărului de aur şi asupra şirurilor lui Fibonacci. Preocuparea lui Weyl de a pune în evidenţă structurile algebrice care domină fenomenele de simetrie se situează şi ea în continuarea firească a eforturilor lui Ghyka (încă din prima sa carte, din 1927, apoi în *Le nombre d'or* şi, mai ales, în *Philosophie et mysthique du nombre*) de a marca utilitatea teoriei grupurilor şi a altor formaţiuni algebrice în cercetarea estetică. Această preocupare este, la Ghyka, doar una din componentele unui remarcabil efort interdisciplinar şi sintetizator de a cuprinde, într-o tratare unitară, punctele de vedere moderne în discipline atît de variate ca fizica, chimia, biologia, metamatematica, obţinînd astfel o privire multilaterală asupra armoniilor figurale şi ritmice şi asupra sugestiilor pe care ştiinţele naturii le dau esteticii. Acum, cînd gîndirea interdisciplinară se află la ordinea zilei într-atît încît unii o mimează numai pentru

Scanned with CamScanner

a părea moderni, este necesar să ne amintim de Matila Ghyka, unul din pionierii acestei gîndiri, în forma ei cea mai îndrăzneaţă : logodirea esteticii cu matematica şi cu ştiinţele naturii.

Cărţile lui Jacob şi Monod ar putea constitui punctul de plecare al unei confruntări între mişcarea formelor vii, aşa cum este ea descrisă la D'Arcy Thompson şi Ghyka şi viziunea care rezultă, în această, privinţă, din noile cuceriri ale biologiei şi geneticii. În particular, vom observa că Jacques Monod include, în cadrul mişcărilor mai importante care s-au produs în biologia modernă, şi apariţia concepţiei generative asupra limbajului, concepţie datorată lui Noam Chomsky, la care aderă : „On sait que selon Chomsky et son école, sous l'extrême diversité des langues humaines, l'analyse linguistique en profondeur révèle une «forme» commune à toutes ces langues. Cette forme doit donc, d'après Chomsky, être considérée comme *innée* et caractéristique de l'espèce. Cette conception a scandalisé certains philosophes ou anthropologistes qui y voient un retour à la metaphysique cartésienne. A condition d'en accepter le contenu biologique implicite, cette conception ne me choque nullement. Elle me paraît naturelle au contraire, dès lors qu'on admet que l'évolution des structures corticales de l'homme n'a pu manquer d'être influencée, pour une part importante, par une capacité linguistique très tôt acquise à l'état le plus fruste" (J. Monod, op. cit., p.150). De aici, pînă la recunoaşterea reprezentării competenţei lingvistice sub forma unei maşini nu este decît un pas. Ipoteza că tocmai această maşină este cea după care sînt modelate toate celelalte competenţe umane, deci toate tipurile de creativitate umană, apare astfel foarte atrăgătoare ; în parte a şi fost testată, în parte abia urmează să fie. Rezultatele în a căror posesie se află actualmente ştiinţa şi filozofia sînt, în această privinţă, foarte promiţătoare. Structurile pe care lingvistica modernă le-a pus în evidenţă, în ceea ce priveşte limbajul articulat, demonstrează o amplă capacitate explicativă în raport cu cele mai variate competenţe ale activităţii umane. Pentru a rămîne în domeniul evoluţiei şi generării formelor vizuale, cărora Ghyka le-a acordat o atît de mare atenţie, vom arăta în cele ce urmează cît de esenţial reia teoria modernă a gramaticilor picturale (pentru noţiunile de bază ale acestei teorii trimitem la lucrările lui Alan C. Shaw,

S. Kaneff şi A. Rosenfeld, menţionate de noi în lucrarea din „Cahiers de linguistique théorique et appliquée", vol. 11, 1974, no.1) anumite procedee generative pe care Ghyka le aşază în centrul preocupărilor sale. Ghyka urmăreşte tot timpul nu structuri încremenite, ci procese care surprind mişcarea, generarea, devenirea formelor. Tocmai din acest punct de vedere este cu deosebire apreciată arta orientală; un peisaj chinez sau japonez este capabil să sugereze, prin creşterea arborilor, o intensă vitalitate, simbolizînd însăşi ideea de germinaţie. Liniile mari ale compoziţiei sugerează forţele tectonice care dau naştere unui munte, iar faliile evocă dinamismul unui conflict (Esthétique des proportions ..., p.22). Numărul de aur rezultă tocmai dintr-un atare principiu generativ şi, în acelaşi timp, de optimizare, deoarece el este singurul care conduce la o împărţire nesimetrică a unui segment, în aşa fel încît puterile sale succesive să dea naştere unui şir al lui Fibonacci, deci unui proces generativ cu caracter dublu aditiv, deoarece la fiecare etapă ultimii doi termeni obţinuţi generează prin adiţiune termenul imediat următor. Recurenţa de tip Fibonacci este, astfel, unul dintre cei mai vechi strămoşi ai aşa-numitelor reguli cu autoincluziune (*self embedding rules*) din teoria gramaticilor formale (vezi S. Marcus, *Gramatici şi automate finite*, Ed. Academiei, Bucureşti, 1964). Această recurenţă simulează procedeul aristotelic prin care o figură adăugată la o figură dată conduce la o nouă figură, asemenea cu prima. Astfel, dacă plecăm de la un dreptunghi ale cărui dimensiuni a şi b dau un raport egal cu numărul de aur, atunci, lipind de acesta, în picioare, un dreptunghi de aceleaşi dimensiuni se obţine din nou un dreptunghi ale cărui dimensiuni ($a + b$ şi a) sînt într-un raport egal cu numărul de aur. Procedeul poate fi continuat, obţinîndu-se un proces de creştere dreptunghiulară care menţine unitatea (numărul de aur) în varietate (schimbarea dimensiunilor dreptunghiului). Primele etape ale acestui proces sînt prezentate în fig.1; am putea construi şi gramatica picturală corespunzătoare, dar preferăm să ilustrăm acest mod lingvistic de abordare pe un alt exemplu: acela al generării unor scări cu un număr de trepte din ce în ce mai mare.

Vom considera trei tipuri de figuri elementare (vezi fig. 2) *a* constînd din două pătrate egale cu laturile paralele cu axele, astfel încît vîrful de sus din dreapta al primului pătrat să co-

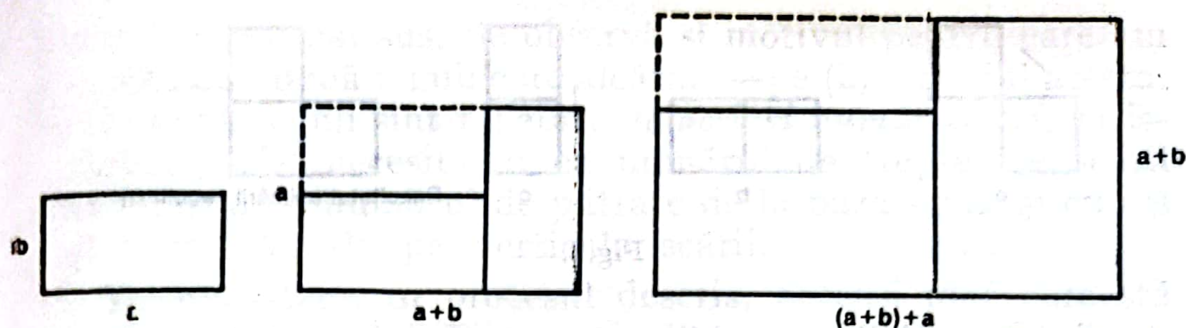


Fig.1.

incidă cu vîrful de jos din stînga al celui de-al doilea pătrat; *b* constînd din două pătrate egale, cu laturile paralele cu axele, astfel încît latura din stînga a celui de-al doilea să se suprapună cu latura din dreapta a celui dintîi ; *c* constînd din două pătrate egale, cu laturile paralele cu axele, astfel încît latura de jos a celui de-al doilea să se suprapună cu latura de sus a celui dintîi. Toate pătratele considerate au aceleaşi dimensiuni. La fiecare figură distingem un cap şi o coadă (deci o orientare). La *a* coada este pătratul din stînga, iar capul cel din dreapta ; la fel la *b* ; la *c* coada este pătratul de jos, iar capul cel de sus. Definim o operaţie de adunare + a două figuri, operaţie al cărei rezultat este figura care se obţine suprapunînd capul primei figuri pe coada celei de-a doua. Definim apoi o operaţie stea $*$ a două figuri, operaţie al cărei rezultat este figura care se obţine suprapunînd (dacă este posibil !) cozile între ele şi capetele între ele. La fiecare din cele două operaţii coada figurii obţinute este coada primei figuri, iar capul figurii este capul celei de-a doua figuri. Fie acum două simboluri S şi A şi fie colecţia G constînd din mulţimea $\{a, b, c\}$ numită vocabular terminal, mulţimea $\{S, A\}$ numită vocabular neterminal (unde simbolul S — numit şi axioma gramaticii — este simbolul de plecare) şi mulţimea de reguli (unde $u \to v$ înseamnă că u se înlocuieşte cu v)

$$(1) \quad S \to b + c$$

$$(2) \quad \begin{cases} S \to [(a + S) + c] * A \\ A \to A + a \end{cases}$$

$$(3) \quad A \to a,$$

unde acolada numerotată cu (2) arată că regulile pe care ea le cuprinde se aplică obligatoriu împreună, în ordinea indicată. O astfel de gramatică corespunde la ceea ce, în

Scanned with CamScanner

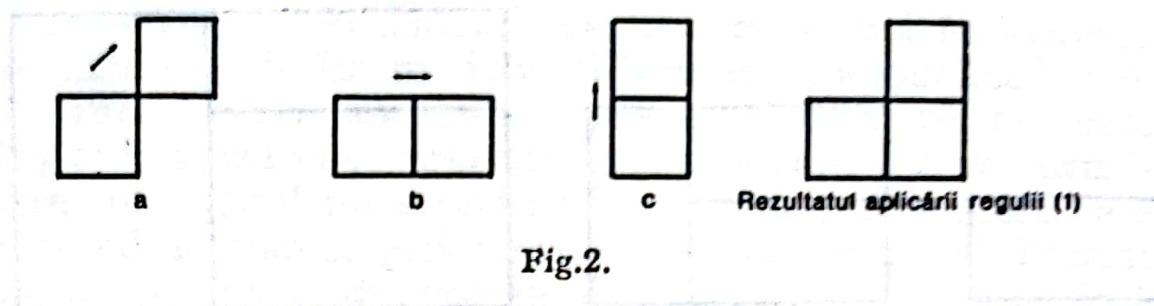


Fig.2.

teoria gramaticilor formale, se numeşte o gramatică matricială. Pentru a genera o scară de dimensiune 2 (a se vedea fig.2) este suficient să aplicăm regula (1). Pentru a genera o scară de dimensiune 3 — deci cu trei trepte — vom aplica mai întîi cuplul (2) de reguli, apoi regulile (1) şi (3). O scară cu patru trepte se obţine aplicînd de două ori cuplul (2), apoi regulile (1) şi (3). O scară cu *n* trepte se obţine aplicînd de *n*—2 ori cuplul (2), apoi regulile (1) şi (3). Primele trei etape ale acestui proces sînt ilustrate în fig.3. Observăm că scara cu *n* trepte se obţine din scara cu *n*—1 trepte, aplicîndu-i o dată cuplul (2) şi apoi regulile (1) şi (3). Regulile care alcătuiesc cuplul (2) au o particularitate importantă: simbolul neterminal din stînga (*S* în prima regulă, *A* în a doua) reapare în membrul al doilea al regulii. Astfel de reguli se numesc *recursive* (sau *cu autoincluziune*) şi pot fi aplicate în mod iterativ, posibilitate care a fost esen-

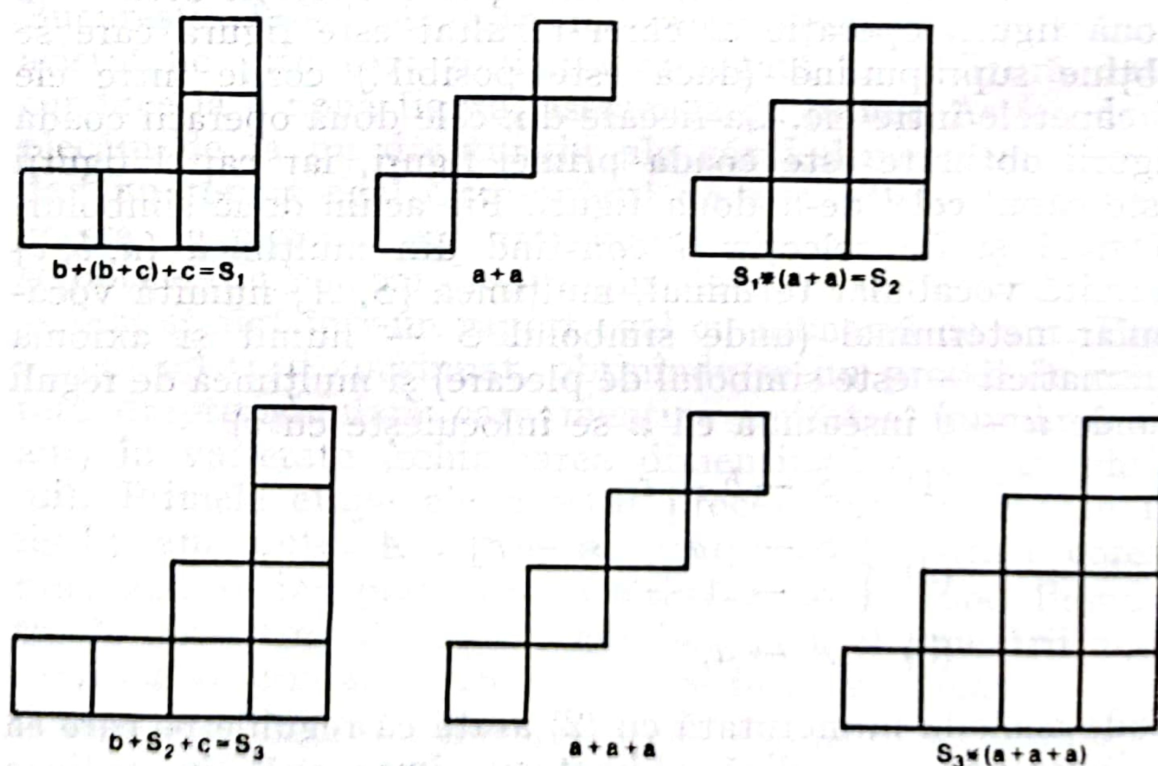


Fig.3.

ţial folosită mai sus. Se observă şi motivul pentru care am cuplat cele două reguli care alcătuiesc pe (2) : în felul acesta, cele două reguli sînt repetate *de acelaşi număr de ori*, satisfăcînd astfel necesitatea ca numărul de trepte ale scării să fie egal cu numărul de pătrate de la baza scării şi cu cel al pătratelor de pe verticala scării.

Recunoaştem, în procesul descris, aceeaşi idee care stă la baza şirului lui Fibonacci. Putem spune că Ghyka a lucrat cu o gramatică picturală particulară, în care singura regulă folosită era aceea indusă de numărul de aur, în modurile arătate mai sus. Astăzi însă ştim să explicităm şi multe alte procese generative. Am discutat recent (S. Marcus, *Linguistic structures and generative devices in Molecular Genetics*, „Cahiers de linguistique théorique et appliquée", vol.11, 1974, no.1) gramaticile generative ale eredităţii, în cadrul cărora multe idei enunţate de Jacob şi Monod în cărţile mai sus menţionate şi de alţi savanţi (pe care nu-i mai discutăm aici) capătă o explicitare tehnică. Sistemele generative inaugurate de Aristid Lindenmayer (*Cellular automata, formal languages and developmental systems*, Proceedings of the IV th International Congress for Logic, Methodology and Philosophy of Science, Bucharest, 1971 ; North Holland Publishing Company, Amsterdam, 1973) sînt capabile să simuleze procesele de dezvoltare celulară în organismele filamentoase şi ocupă de pe acum o foarte bogată literatură. Toate aceste procedee generative moderne, care pun în mişcare importante capitole ale logicii matematice şi algebrei şi se prevalează de modele recente în biologie, lingvistică, arhitectură şi alte domenii, oferă cadrul adecvat pentru o nouă lectură a operei lui Ghyka, pentru o fundare modernă şi unitară a procedeelor şi consideraţiilor sale. Este regretabil că această operă a fost multă vreme neglijată de către cercetătorii români (cu excepţia articolului lui P. Comarnescu, nu cunoaştem decît un articol, în manuscris, al lui Stamatescu), iar unele referinţe la opera sa sau la numele său vin tocmai din partea unor autori care-şi iau imediat distanţa necesară pentru a se dirija într-o altă direcţie (cum procedează Andrei Pleşu în cartea, dealtfel interesantă şi incitantă *Călătorie în lumea formelor*, Ed. Meridiane, Bucureşti, 1974 ; atragem atenţia cititorului şi asupra densei prefeţe a lui Ion Frunzetti, de un interes care depăşeşte scopul pe care şi l-a propus). O carte ca aceea a lui Tiberiu Roman (*Sime-*

Scanned with CamScanner

tria, Ed. Tehnică, Bucureşti, 1963), care oferă un cadru optim pentru discutarea ideilor lui Ghyka, se mulţumeşte să-l menţioneze doar în treacăt. Rămîne de asemenea să se testeze pertinenţa secţiunii de aur în domeniul poeziei şi al structurilor narative, al teatrului şi filmului. După cum se atrage atenţia în cartea lui Martin Gardner (*Mathematical Games from Scientific American*, cunoscută de noi prin intermediul traducerii în limba rusă, Izd. Mir, Moscova, 1974), există deja opere literare importante (ca aceea a lui Şota Rustaveli) în care s-a detectat prezenţa numărului de aur (op. cit., p.393).

Opera lui Matila Ghyka este prin excelenţă o operă deschisă, care ne invită mereu la o nouă lectură, în funcţie nu numai de achiziţiile noi ale ştiinţei, ci şi de propria noastră sensibilitate.

Scanned with CamScanner

PIUS ŞERBAN COCULESCU (PIUS SERVIEN)

Fiu al binecunoscutului astronom român Nicolae Coculescu, Pius Servien — pe numele său adevărat Şerban Coculescu — este autorul unor lucrări interesante şi valoroase de stilistică, poetică, filozofia ştiinţelor şi fundamentele matematicii, publicate în Franţa, între 1925 şi 1953.

Născut în 1903, în România, Pius Servien avea să părăsească ţara la vîrsta de 13 ani, plecînd în Franţa. De atunci a mai vizitat de două ori ţara noastră, prima oară în 1926—1927, pentru a face serviciul militar, iar a doua oară în 1938. Şi-a trecut doctoratul în litere în 1928, la Paris. A murit în 1959, în Franţa. De formaţie umanistă complexă, cu vaste cunoştinţe atît în domeniul ştiinţelor exacte, cît şi în cel al artelor şi literaturii, el s-a integrat în mod organic în cultura franceză, cîştigîndu-şi o înaltă apreciere atît din partea unor matematicieni ca Borel, Hadamard, Montel şi Denjoy sau fizicieni ca Dirac, cît şi din partea unui poet ca Paul Valéry. Cu excepţia volumului de poezii *Curgînd clepsidra* şi a eseului *Introducere la un mod de a fi* (Scrisul Românesc, Bucureşti, 1927), întreaga sa operă este scrisă în limba franceză.

Pius Servien a desfăşurat o activitate publicistică bogată, destul de eterogenă şi de inegală ca valoare. Ne vom opri aici numai asupra unor părţi ale acestei activităţi. Ne exprimăm recunoştinţa faţă de prof. Constantin Drîmbă, pentru a ne fi atras atenţia asupra cercetărilor lui Servien şi pentru a ne fi pus la dispoziţie unele documente şi date interesante relative la acest savant. Profesorul C. Drîmbă a fost prieten apropiat al lui Servien în timpul şederii sale în Franţa.

În 1964, cînd am început a ne interesa de opera lui Servien, am urmărit publicaţiile culturale româneşti din perioada ulterioară celui de-al doilea război mondial, pentru a vedea modul în care a fost considerată opera sa în lumina dezvoltării recente a ştiinţei şi a teoriei literare. Nu am

găsit însă absolut nimic. Nici matematicienii, nici filozofii, nici lingviştii, nici teoreticienii artei şi literaturii nu luaseră în discuţie, nici măcar nu consemnaseră ideile lui Servien. La 5 martie 1965 am ţinut, în cadrul Cercului de poetică de sub conducerea prof. Alexandru Rosetti, o expunere intitulată *Un precursor al poeticii matematice: Pius Servien,* expunere care a fost publicată în acelaşi an în revista „Studii şi cercetări lingvistice" şi, într-o versiune în limba franceză, în revista „Revue roumaine de linguistique". De atunci, opera lui Servien a rămas în permanenţă în atenţia noastră, ea ne-a stimulat într-o activitate care, în 1970, ne-a condus la publicarea unei monografii de poetică matematică, la baza căreia se află ideile lui Servien. Între timp, mulţi alţi cercetători au reluat fie aceste idei, fie rezultatele noastre cu privire la ele; vom căuta să dăm o imagine parţială a lor în cele ce urmează, imagine cu atît mai necesară cu cît nici pînă astăzi nu dispunem de o ediţie românească selectivă a operei lui Servien şi de o evaluare critică mai sistematică a ei, în timp ce atîţi autori de importanţă mai mică au fost de mult editaţi şi înconjuraţi de atenţia criticii.

Dintre lucrările lui Servien, ne-au reţinut în special atenţia, prin caracterul lor de pionierat, prin anticiparea îndrăzneaţă a unor idei centrale astăzi în lingvistica matematică şi în poetica matematică: *Le langage des sciences* (Paris, 1931; o nouă ediţie în „Actualités scientifiques et industrielles", Paris, 1939), *Principes d'esthétique; problèmes d'art et langage des sciences* (Boivin, Paris, 1932—1935); *Esthétique* (Payot, Paris, 1953). Prin aceste lucrări, Pius Servien este, după cum vom arăta, un precursor de seamă al unor teorii recente, deosebit de actuale. Cu deosebire importantă ni s-a părut această ultimă carte a lui Servien, care, aşa cum indică şi subtitlul ei (*Musique-peinture-poésie-science*), este o sinteză a concepţiilor autorului asupra artei şi ştiinţei. Mai mult decît atît, această carte selectează şi sintetizează din toate cărţile sale anterioare ideile cele mai interesante, înglobîndu-le într-o expunere coerentă şi unitară. Cu acest prilej, am căpătat convingerea că în gîndirea atît de originală şi de multilaterală a lui Servien axul central este constituit de teoria sa privind cei doi poli ai „limbajului total": limbajul ştiinţific şi limbajul liric. Vom începe deci cu prezentarea acestei teorii, multă vreme ignorată, dar a cărei actualitate continuă să crească, dato-

Scanned with CamScanner

rită modului exemplar în care se pun jaloanele unui proces de modelare matematică de o deosebită capacitate explicativă.

Limbajul ştiinţific (*LS*) este definit de Servien în opoziţie cu limbajul liric (*LL*). Mai întîi, fiecare frază din *LS* are un sens unic determinat, în timp ce fiecare frază din *LL* are o infinitate nenumărabilă de sensuri (o mulţime este numărabilă dacă elementele ei pot fi numerotate; prototipul mulţimilor infinite numărabile îl constituie mulţimea numerelor întregi pozitive 1, 2,...*n*,..., în timp ce prototipul mulţimilor nenumărabile îl constituie totalitatea punctelor unei drepte sau ale unui segment de dreaptă). Servien compară sensurile unei fraze din *LL* cu variaţiile infinite ale unui chip omenesc, care în fiecare moment este altfel decît în fiecare din momentele precedente.

Însă proprietatea care, pentru Servien, este definitorie, deci fundamentală, liminară pentru *LS* este alta. Ea constă în faptul că orice aserţiune în *LS* poate fi parafrazată, exprimată într-un fel diferit, dar perfect echivalent. Această modificare este posibilă într-o infinitate de moduri.

Orice frază din *LS* admite deci o infinitate de fraze echivalente, adică avînd acelaşi sens cu ea. Tocmai acest fapt face posibile, în *LS*, definiţiile şi demonstraţiile. O definiţie este indicarea unei perechi de fraze echivalente, iar o demonstraţie este, de multe ori, de exemplu atunci cînd se stabileşte o condiţie necesară şi suficientă pentru ca un anumit fapt să aibă loc, indicarea unui şir de fraze echivalente. Existenţa frazelor echivalente este strîns legată, pentru Servien, de existenţa, în *LS*, a frazelor nule, adică a frazelor care, adăugate altora, nu aduc nici o modificare de sens. De exemplu, fraza „doi plus trei fac cinci" — pe care Servien o dă ca exemplu de frază din *LS* — este echivalentă cu fraza „doi plus trei fac cinci plus unu minus unu". Aici, fraza „plus unu minus unu" este o frază nulă. În schimb, în *LL* nu există fraze nule (nici măcar fraza vidă, tăcerea, nu e aici nulă!) şi nu există fraze echivalente. Fiecare frază din *LL* este un unicat, irepetabilitatea sensului fiind esenţială pentru o astfel de frază. Acestei fraze i se asociază un fascicol de sensuri, care se prezintă ca un spectru continuu. Fiecare iradiere a acestui spectru este sesizată de un anumit individ uman şi numai unul, într-un moment bine determinat al existenţei sale.

Scanned with CamScanner

Cîteva comentarii sînt necesare, înainte de a merge mai departe. Mai întîi, trebuie să observăm că Servien are în vedere un concept de limbaj ştiinţific care se defineşte printr-o anumită funcţionalitate, anume funcţionarea unui atare limbaj se sprijină esenţial pe posibilitatea de a opera substituiri prin echivalenţă. Această „sinonimie infinită" nu numai că nu vine în contradicţie cu precizia *LS*, dar nici nu ar fi posibilă fără această precizie, deoarece sinonimia a două expresii constă în identitatea semnificaţiei lor, deci fără unicitatea acestei semnificaţii nici nu am şti despre ce identitate este vorba. La rîndul ei, fenomenul de sinonimie infinită întăreşte precizia limbajului ştiinţific, deoarece face posibile, cum am observat, definiţiile şi demonstraţiile. Cu alte cuvinte, un termen sau o frază se precizează în măsura în care semnificaţia corespunzătoare reuşeşte să se metamorfozeze dintr-o proprietate contextuală într-una definiţională. (Am analizat distincţia dintre aceste două tipuri de semnificaţii într-un articol recent din „Noesis", vol.2, 1974.)

Statutul pe care Servien îl acordă semnificaţiei lirice nu numai că face imposibilă, dar face chiar lipsită de sens existenţa sinonimiei în *LL*. Într-adevăr, nu putem pune problema echivalenţei semantice a două expresii din *LL*, atîta vreme cît, chiar într-un context fixat, ele generează, fiecare în parte, un spectru continuu de semnificaţii. Aici însă se pun unele probleme delicate, pe care Servien nu le-a putut elucida şi care au făcut obiectul unor cercetări asidue în ultimii ani: Este influenţa lecturii singura sursă a omonimiei (ambiguităţii) infinite a *LL*? În cazul negativ, care sînt celelalte surse ale acestei ambiguităţi? Pot fi ele descrise cu ajutorul unor structuri metrice sau fac ele necesar un aparat topologic mai special?

Nu se poate spune că ideile lui Servien vin în întîmpinarea unor intuiţii comune în acest domeniu. Este foarte răspîndită şi acum impresia că limbajul poetic este cel care se bazează pe sinonimie, în timp ce limbajul ştiinţific o evită, pentru a nu-şi altera precizia. Astfel, M. Radu (*Actes du X^e Congrès International des Linguistes*, vol. III, pp.74—75) crede că termenii tehnici nu pot fi substituiţi cu alţii, în timp ce sursa expresivităţii poetice se află tocmai în substituirile sinonimice. O confuzie similară apare recent la Bruno Traversetti şi Stefano Andreani (*Le strutture del linguaggio poetico*, Edizioni RAI, 1972, p.173), care,

referindu-se la situaţia limbajului poetic, scrie: „La parola diventa infatti intercambiabile; l'uso della parola viene insegnato come intercambiabile. La soddisfazione dell'esperienza poetica diventa allora il livello della traduzione . . ."

O situaţie delicată o prezintă aserţiunea lui Servien cu privire la „frazele nule". Dacă inexistenţa lor în *LL* este în afară de orice îndoială, statutul acestor fraze în *LS* pare a fi mai complex decît l-a prevăzut Servien. Chiar exemplul său, menţionat mai sus, „plus unu minus unu" este o frază a cărei semnificaţie este departe de a fi nulă, ea exprimînd faptul că adunarea şi scăderea aceluiaşi număr sînt două operaţii inverse una alteia; deci nu semnificaţia expresiei considerate este nulă, nul fiind doar rezultatul aplicării operaţiilor pe care această expresie le indică.

După cum se observă, apartenenţa unei fraze la *LS* este, pentru Servien, incompatibilă cu apartenenţa sa la *LL*. Aici trebuie însă să introducem o modificare, care să dea modelului lui Servien mai multă supleţe. În loc de a considera *LS* şi *LL* ca două limbaje disjuncte, este mult mai comod — şi mai adecvat realităţii — să admitem că fiecare frază aparţine *LL* (deci să admitem că nu există fraze prin ele însele apoetice), iar *LS* este o parte a *LL* — eventual, chiar *LS* = *LL*. Cu alte cuvinte, fiecare frază este susceptibilă de două ipostaze, una prin care ea aparţine *LS* şi alta prin care aparţine *LL*.

Pot exista fraze care încă nu au fost integrate *LS* sau *LL*, dar nu i se poate nega nici unei fraze această capacitate. Baudelaire şi Arghezi au încorporat în *LL* numeroase fraze considerate pînă la ei apoetice, iar alte fraze, considerate astăzi apoetice, vor fi inserate într-un context care să le confere poezie, mîine. Cu alte cuvinte, apartenenţa unei fraze la *LS* sau *LL* nu este o proprietate intrinsecă a acestei fraze, ci un raport al ei cu contextul în care este plasată. Să luăm chiar exemplul folosit de Servien. O frază de tipul *«deux et deux quatre»* nu aparţine totdeauna lui *LS*, aşa cum afirmă Servien; ea aparţine lui *LS* atunci cînd se află într-un manual de aritmetică sau este folosită într-o operaţie de contabilitate. Dar aceeaşi frază constituie primul vers din poezia *Page d'écriture* a lui Jacques Prévert. În acest din urmă context, „doi şi cu doi fac patru" nu mai este echivalent cu „doi şi cu doi fac patru plus unu minus unu"; aici nu mai există fraze nule, nici

fraze echivalente, fraza „doi şi cu doi fac patru" devine o frază din *LL*. „Poetul scoate cuvintele din starea lor naturală şi le aduce în starea de graţie" spune Lucian Blaga. Jacques Prévert a adus în starea de graţie o frază în aparenţă atît de banală ca „doi şi cu doi fac patru".

Dar dacă o frază din *LS* admite o infinitate de fraze echivalente, aceasta înseamnă că sensul exprimat de ea manifestă o relativă independenţă de materialul sonor; într-adevăr, două fraze echivalente pot fi foarte diferite ca structură sonoră (frazele „unu este mai mic decît doi" şi „diferenţa dintre cinci şi trei este mai mare decît diferenţa dintre patru şi trei", deşi echivalente, au foarte puţin comun ca structură sonoră). Nu acelaşi lucru se întîmplă cu o frază din *LL*. Varietatea de sensuri cu care este ea încărcată depinde esenţial de structura sonoră, deoarece o modificare oricît de mică a acestei structuri introduce o perturbaţie în implicaţiile ei afective. Ajungem astfel la o nouă distincţie între *LS* şi *LL*: primul nu depinde de structura ritmică a frazelor, pe cînd al doilea este esenţial dependent de această structură. Într-adevăr, ritmul unei fraze revine după Servien la un şir finit de numere întregi pozitive, numărul de termeni ai acestui şir fiind egal cu numărul de silabe accentuate existente în frază, iar termenul de rang n al şirului fiind egal cu suma dintre 1 şi numărul de silabe neaccentuate care separă a $n-1$-a silabă accentuată de a n-a silabă accentuată. De exemplu, ritmul versului eminescian „Mai am un singur dor" este dat de şirul 2, 2, 2. Se ştie însă că într-o limbă naturală nu putem avea oricît de multe silabe neaccentuate consecutive; fiecărei limbi naturale i se asociază un număr întreg pozitiv p, astfel încît să nu putem avea, în limba respectivă, mai mult de p silabe neaccentuate consecutive. De aici rezultă că ritmul unei fraze nu poate conţine termeni mai mari ca $p + 1$. Pe de altă parte, este clar că două fraze de aceeaşi structură ritmică au acelaşi număr de silabe accentuate, deci şirurile asociate au acelaşi număr n de termeni. Deoarece nu există decît un număr finit de şiruri de lungime n, avînd ca termeni numere întregi pozitive mai mici ca $p + 2$, rezultă că numărul frazelor care au aceeaşi structură ritmică cu o frază dată este finit. Însă pentru orice frază din *LS* există o infinitate de fraze echivalente cu ea, deci o infinitate de fraze echivalente cu ea şi avînd o structură ritmică diferită. Am demonstrat astfel că sensul unei fraze

Scanned with CamScanner

din *LS* nu depinde de structura ritmică a acestei fraze.

Din cele de mai sus nu rezultă că în *LS* ritmul este indiferent. Într-adevăr, dintre două fraze echivalente, dar cu structură ritmică diferită, una poate fi mai scurtă, mai simplă, mai elegantă, poate fi mai accesibilă, poate stimula mai mult la reflecţie decît cealaltă. În această privinţă, ritmul poate fi unul din criteriile de selecţie a uneia din mai multe fraze echivalente. Un memoriu de matematică îşi are structura sa ritmică, deloc indiferentă cititorului, deoarece această structură îi impune un anumit regim de activitate a gîndirii. Dar, repetăm, această structură ritmică nu influenţează sensul exprimat, ci numai modul în care această exprimare se face. Cu totul altfel apare ritmul în *LL*. Aici, structura ritmică a unei fraze nu poate fi despărţită de ceea ce această frază exprimă, ea aparţine organic conţinutului exprimat. Să ne gîndim, de pildă, la pulsaţia molcomă, de fericită şi duioasă reverie, din *Sara pe deal*; oare nu aparţine ea însăşi substanţei acestei poezii? Ar fi oare corect să spunem că aici structura ritmică 13133/23133/23133 ... este, pentru Eminescu, rezultatul unei alegeri dintre mai multe structuri, corespunzătoare unor fraze echivalente? Eminescu ar fi putut oscila, negreşit, între mai multe structuri ritmice, dar aceasta numai atîta vreme cît oscila între mai multe fascicole de sensuri care se cereau exprimate. Odată cu victoria unuia dintre fascicole asupra celorlalte, structura ritmică s-a impus şi ea într-un mod unic, deoarece fiecare fascicol de sensuri, prin aderenţa sa la structura sonoră care-l exprimă, implică o structură ritmică bine determinată.

Cu totul alta este situaţia în *LS*; aici, după cum am văzut, nici un sens nu implică o structură ritmică determinată, deci mai întîi hotărîm sensul pe care vrem să-l exprimăm, apoi alegem o structură ritmică dintr-o infinitate de structuri posibile.

Studiul structurilor ritmice ocupă o bună parte din opera lui Servien (*Essai sur les rythmes toniques du français*, Presses Universitaires de France, Paris, 1925; *Les rythmes comme introduction physique à l'esthétique*, Boivin, Paris, 1930; *Lyrisme et structures sonores*, Boivin, Paris, 1930). Contribuţiile sale în această privinţă au avut un larg ecou, fiind menţionate printre rezultatele clasice în acest domeniu. Servien este primul care a propus un model matematic al

structurilor ritmice și care a studiat ritmul nu doar ca un ornament al poeziei, ci ca o proprietate generală a limbajului uman. În particular, Servien este cel dintîi care se ocupă de rolul structurilor ritmice în *LS*. O formalizare ulterioară a acestor probleme a fost dată în articolul nostru *Langage scientifique, structures rythmiques, langage lyrique* (în „Cahiers de linguistique thèorique et appliquée", vol.5, 1968) și reprodusă în capitolul IV din cartea noastră *Poetica matematică* (Ed. Academiei, 1970). Considerațiile lui Servien relative la ritm și la probabilitate prefigurează cercetările de mare amploare ale lui A. N. Kolmogorov și ale colaboratorilor săi din urmă cu vreo zece ani (în „Voprosy jazykoznanija", anii 1962, 1963, 1965), cercetări care își îndreaptă atenția asupra diferitelor tipuri de distribuții probabilistice care guvernează ritmul unei opere, unui poet sau unei limbi în care nu există o regulă fixă a accentului.

Ajungem astfel la problema stilului. Dacă înțelegem stilul în sensul Retoricii clasice, ca o problemă confruntată nu atît cu ceea ce avem de spus, ci cu *modul* în care o spunem, atunci în *LS* problemele de stil sînt cu adevărat la ele acasă, pentru că efectiv se pune, pentru fiecare sens care se cere exprimat, chestiunea unei alegeri, a alegerii unei fraze dintr-o infinitate de fraze care exprimă sensul respectiv. În această alegere ne folosim de numeroși factori, dintre care unii au fost semnalați mai sus. Posibilitățile infinite ale unei astfel de alegeri explică, în bună măsură, de ce este posibil să recunoști un matematician chiar dintr-o expunere a unor rezultate cunoscute, neoriginale. Să luăm, de pildă, primul volum al tratatului de teoria funcțiilor de variabilă complexă al lui Simion Stoilow. Aici sînt prezentate aspecte clasice ale acestei teorii, noțiunile și teoremele nu aparțin autorului, multe dintre ele sînt cunoscute încă din secolul trecut. Toate aceste fapte matematice sînt prezentate, bineînțeles, într-o formă mai modernă, dar aceasta se întîmplă și în alte tratate de teoria funcțiilor de variabilă complexă și nu ar fi suficient să imprime acestui tratat puternica personalitate a autorului. Și totuși, orice matematician român va recunoaște aici, numai din cîteva pagini, uneori din numai cîteva fraze, pe Stoilow. Acea îmbinare specifică de economie a expresiei, eleganță a expunerii și proprietate a termenilor, acele formulări care delimitează net esențialul de accesoriu și luminează problematica ulterioară, cine oare le-ar putea atribui altuia

Scanned with CamScanner

decît lui Stoilow? Dacă ne referim la memoriile originale ale matematicienilor, personalitatea stilistică devine şi mai interesantă. Dar cît de puţin s-a studiat structura stilistică a limbajului ştiinţific! Cele mai multe cercetări lingvistice ale textelor ştiinţifice se limitează la chestiuni de terminologie. Printre rarele publicaţii care ating şi alte aspecte, mai structurale, ale *LS*, menţionăm: Th. Savory, *The language of science*, Londra, 1953 şi *The character of the language of science*, articol publicat în antologia *The world of words*, Boston, 1967; Anatol Rapoport, *The language of science, its simplicity, beauty and humor*, în antologia menţionată mai sus; *Osobennosti jazyka naučnoĭ literatury* (redactor resp. V. N. Jarceva), Izd. Nauka, Moscova, 1965; *Stilistiko-grammatičeskie certy jazyka naučnoĭ literatury* (redactor resp. V. N. Jarceva), Izd. Nauka, Moscova, 1970; Solomon Marcus, capitolul III, dedicat limbajului matematic, din cartea *Poetica matematică*; Sanda Golopenţia-Eretescu, *Formalized languages: scientific, Current Trends in Linguistics*, vol.12, 1974; Solomon Marcus, *Semiotics of scientific languages* (Raport general la Congresul Asociaţiei internaţionale de studii semiotice, Milano, iunie 1974; publicat în Actele acestui congres, Mouton, Haga, 1975) şi bibliografia indicată aici. Însă în toate aceste cercetări stilul este înţeles ca un ansamblu de particularităţi lexicale, gramaticale sau semiotice, nu ca un mod de alegere între expresii echivalente, aşa cum preconiza Servien cercetarea stilistică.

Spre deosebire de *LS*, pentru care stilul revine la o selecţie între mai multe fraze echivalente, în *LL* o problemă similară a stilului nu există, deoarece aici nu există fraze echivalente. Aici problema stilului este alta. Ea constă, mai întîi, în a sesiza, a intui cu o cît mai mare acuitate, cu o cît mai fină nuanţare, trecerile de la un fascicol de sensuri la altul, pe care le provoacă cele mai mici modificări de expresie, relative fie la fraza în cauză, fie la contextul în care este ea plasată; apoi, în a definitiva, pe baza acestei sesizări, forma frazelor. Dar fascicolul de sensuri asociat unei fraze în *LL* reuneşte diferitele sensuri pe care oameni diferiţi le asociază, în momente diferite, frazei considerate. Poetul sesizează, într-o perioadă limitată, doar o parte a acestui fascicol. Dacă f_1 şi f_2 sînt două fraze diferite, cărora li se asociază, în *LL*, fascicolele de sensuri S_1 şi S_2, s-ar putea întîmpla ca S_1 şi S_2 să posede în comun un anumit

subfascicol, fie el S_{12}. Dacă S_{12} este tocmai subfascicolul sesizat de poet în intervalul de timp în care își scrie poezia, este evident că poetul va folosi, în mod indiferent, una dintre frazele f_1 și f_2, deși, în fapt, numai una dintre aceste fraze era îndreptățită. Dar prin aceasta el a încălcat un imperativ primordial al *LL*, limbaj care nu admite fraze echivalente. Dacă ținem seamă că, pe parcursul compunerii unei poezii, astfel de situații pot să intervină în număr considerabil de mare, ne dăm seama în ce măsură și în ce fel niște versuri se pot îndepărta, mai mult sau mai puțin, de la poezie, de la *LL*. Măiestria stilistică revine deci aici la a evita, pe cît posibil, situații de tipul celor descrise mai sus, în care opoziția dintre două fraze ale *LL* se neutralizează, provocînd, în mod accidental, echivalența dintre cele două fraze. Dealtfel, marii poeți au observat de mult acest pericol, și în cele mai bune poeme ale lor orice cititor simte că nici un cuvînt, nici măcar o virgulă, nu pot fi clintite de la locul lor. Dar astfel de situații, în care neutralizarea opozițiilor dintre fraze este în întregime evitată, sînt foarte rare (poate chiar inexistente). Însă orice poet aspiră la aceasta.

Relativa independență a *LS* de structura sonoră a frazelor constituie o premisă importantă a creării diferitelor limbaje simbolice, folosite în matematică, în fizică, în chimie și în alte științe. Într-adevăr, dat fiind că sensurile, în *LS*, sînt reprezentate nu prin faze, ci prin clase de fraze echivalente, rezultă că o notație optimă este aceea care notează tocmai aceste clase. Poincaré observa că o notație bună echivalează cu o descoperire. Prin aceasta el recunoștea funcția euristică a stilului în *LS*. Dar folosirea limbajelor simbolice ne apropie de structura limbajelor logice (artificiale), care manifestă un pronunțat caracter numeric; de aici, observația lui Servien că *LS* are implicată, în țesătura sa, o structură numerică, structură care va fi explicitată cînd timpul o va cere. Prin aceasta, Servien anticipa o idee care avea să fie în plină actualitate cu douăzeci de ani mai tîrziu și, în continuare, și astăzi, în problema limbilor logice de informație pentru diferitele ramuri ale științei.

Vechiul deziderat al lui Leibniz, de construire a unei limbi universale, l-a preocupat cu insistență pe Servien. El a demonstrat deosebit de convingător că perspectivele construirii unei astfel de limbi sînt oferite tocmai de structura

LS. Într-adevăr, pentru fiecare sens exprimabil în *LS* există, în fiecare limbă naturală, o infinitate de fraze care-l exprimă. *LS* devine astfel acel nucleu lingvistic care-şi are reprezentanţi în fiecare limbă naturală, puntea de legătură între aceşti reprezentanţi fiind tocmai existenţa unui sens comun, necondiţionat de specificul unei limbi naturale. Dacă adăugăm la aceasta observaţiile fine ale lui Servien relative la structura probabilistică a limbii, recunoaştem o prefigurare a preocupărilor atît de actuale, cu douăzeci de ani mai tîrziu, de construire a unor limbi logice universale. Cercetările matematicianului olandez Hans Freudenthal concretizate în cartea sa *Lincos* (Limba cosmică), apărută în 1960, se află, în germene, la Pius Servien. Servien a insistat asupra necesităţii de a se studia specificul gramatical al *LS*, observînd că structura gramaticală a acestui limbaj este incomparabil mai simplă decît a *LL*. Acest deziderat a început a fi realizat abia în ultimii ani, odată cu accelerarea preocupărilor de lingvistică aplicată.

Deosebit de judicioase sînt ideile lui Servien relative la problema traducerii. Ramificaţiile pe care *LS* le are în toate limbile naturale fac ca, pentru el, traducerea dintr-o limbă în alta să fie pe deplin posibilă. Operaţia de traducere din limba naturală L_1 în limba naturală L_2 constă aici în trecerea de la o frază din L_1 la o frază din L_2 cu acelaşi sens *s* ca şi prima. Dar, deoarece în L_2 există o infinitate de fraze avînd sensul *s*, rezultă că traducerea *LS* nu este numai o problemă de fidelitate ştiinţifică, ci şi una de stil. În ceea ce priveşte *LL*, el nu este traductibil. Ceea ce se numeşte aici, în mod obişnuit, o traducere, este de fapt un proces de aproximare, căruia i se caută, cu mari eforturi, în ultima vreme, osatura ştiinţifică. Pius Servien a pus, în orice caz, problema traducerii pe un teren ştiinţific, anticipînd sau prefigurînd unele cercetări valoroase din ultima vreme, datorite lui R. Jakobson (*On linguistic aspects of translation*, *On trannlation*, Cambridge, 1959), G. Mounin (*Les problèmes théoriques de la traduction*, 1963 şi *La machine à traduire*, 1964) şi mai ales lui I. I. Revzin şi V. I. Rozenţveig (*Osnovy obščego i mašinnogo perevoda*, 1964).

Una dintre cele mai interesante idei emise de Servien se referă la obiectul esteticii ca ştiinţă. Luînd în consideraţie, în mod explicit, arta literară, estetica este, după Servien, studiul *LL* şi al fascicolelor de sensuri pe care el le expri-

mă, cu ajutorul *LS*. Cu alte cuvinte, estetica, studiind *LL*, îşi formulează aprecierile cu ajutorul *LS*. Dacă ţinem seama că mulţimea sensurilor exprimate în *LL* este nenumărabilă (chiar dacă ne limităm la o singură frază din *LL*) şi necuantificabilă, în timp ce mulţimea sensurilor exprimabile în *LS* este numărabilă, discretă, cuantificabilă, rezultă că scopul pe care şi-l propune estetica este, într-un anume sens, asemănător multor altor discipline. Într-adevăr, procesul de aproximare a nenumărabilului prin numărabil este o metodă frecventă de cercetare a realităţii în cele mai multe ştiinţe exacte.

Trebuie să recunoaştem că teoria estetică a lui Servien nu s-a bucurat, pînă în urmă cu vreo zece ani, de audienţa pe care o merita, în ciuda faptului că tocmai în legătură cu această teorie Paul Valéry (*Le cas Servien, Annexe à Pius Servien*, Orient, Gallimard, Paris, 1942) îi scria: „Vous avez fait la tentative la plus intéressante et la plus hardie que l'on ait faite à ma connaissance pour capturer l'Hydre Poétique". Într-adevăr, încercarea lui Servien era deosebit de temerară. Ea era parcă o replică la îndoiala amară pe care Rainer Maria Rilke o exprima, la începutul secolului nostru, în ale sale *Scrisori către un tînăr poet*: „Dealtfel, nimic mai rău decît critica pentru a te apropia de o operă de artă, ea nu duce decît la neînţelegeri, mai mult sau mai puţin fericite. Nu orice poate fi cuprins în cuvînt, nu despre totul se poate vorbi, aşa cum de foarte multe ori am putea să o credem, sînt întîmplări care rămîn fără grai, ele se petrec pe un tărîm în care cuvîntul nu a pătruns niciodată. Iar despre operele de artă este cel mai greu de vorbit, ele sînt existenţe tainice, a căror viaţă veşnică trăieşte alături de viaţa noastră trecătoare".

Totuşi, încercarea lui Servien nu era hazardată. El şi-a dat seama, înainte de mulţi alţii, că arta trebuie abordată pe o cale indirectă. Deoarece *LS* admite o descriere riguroasă, prin metode logico-algebrice, primul model formal al *LL* va fi acea zonă a limbajului total care este în afara *LS*.

Teoria estetică a lui Servien ne apare azi de o mare valoare, deschizînd perspective noi în studiul limbajului poetic. Insuficienta audienţă a acestei teorii în rîndul esteticienilor de formaţie filozofică sau literară (totuşi cartea de retorică generală a grupului μ din Liège, carte tradusă recent în româneşte, în Editura Univers, menţionează ideile

estetice ale lui Servien) este nu numai nedreaptă, dar şi dăunătoare pentru dezvoltarea unei estetici ştiinţifice. Vom încerca, în rîndurile următoare, să explicăm semnificaţia profundă şi actualitatea esteticii lui Servien, reluînd firul gîndirii sale, cu înţelegerea pe care ne-o dă metodologia ştiinţifică contemporană.

Mai întîi, vom găsi necesar să înlocuim denumirea de limbaj liric, folosită de Servien, prin aceea de limbaj poetic. Limbajul liric constituie un caz particular al limbajului poetic, acela în care funcţiile principale, dominante, sînt atît funcţia poetică (centrată asupra mesajului, pentru a ne referi la schema clasică propusă de Roman Jakobson pentru procesul de comunicare lingvistică), cît şi funcţia emotivă (centrată asupra emiţătorului). Nu credem însă că este necesar să limităm în acest fel raza de acţiune a consideraţiilor lui Servien. S-a crezut multă vreme (din păcate, am căzut şi noi victimă, în *Poetica matematică*, acestei confuzii) că opoziţia dintre ştiinţific şi poetic corespunde opoziţiei dintre logic şi afectiv, dintre raţiune şi emoţie. Mulţi o mai cred şi astăzi. Este adevărat că *LS* prezintă o densitate logică superioară limbajului uzual, că numărul de silogisme este mai mare în cel dintîi decît în cel de-al doilea. Dar ceea ce i se opune, în limbajul poetic, densităţii silogistice nu este densitatea de emoţie (aceasta se distribuie în mod egal între cele două limbaje), ci densitatea de sugestie, adică predilecţia limbajului poetic de a trimite *indirect* la anumite obiecte sau stări, de a le sugera doar, în loc de a le numi. Tocmai în acest scop sînt folosite figurile, metaforice sau metonimice şi, în general, conotaţiile de orice fel în limbajul poetic. Pe de altă parte, aspectul esenţialmente silogistic al limbajului matematic, de exemplu, nu trebuie să ne inducă în eroare. „O teoremă este un sentiment” spunea Gr. C. Moisil. Ea ascunde tot atîta zbucium uman cît este nevoie pentru a clădi un poem.

Pius Servien era conştient de faptul că unul dintre dezavantajele principale ale cercetării tradiţionale a limbajului poetic rezidă în faptul că metalimbajul folosit în această cercetare este de acelaşi tip cu limbajul investigat. Coincidenţa dintre metalimbaj şi limbajul-obiect are consecinţe importante. În loc să se obţină o mai bună şi mai profundă cunoaştere a naturii limbajului poetic, a modului în care se structurează şi este generat acest lim-

baj, se obține (în cel mai bun caz) o nouă operă poetică, o operă poetică de ordinul al doilea, deoarece obiectul ei este tot o operă poetică. Este deci necesar ca metalimbajul folosit să fie un limbaj de un alt tip decît cel poetic. În această privință, nu există nici o alegere. Limbajul cotidian, lipsit de precizie, eterogen și supus fluctuațiilor permanente ale vorbirii individuale, nu corespunde exigențelor unei cercetări riguroase. Am putea chiar spune că cu cît obiectul supus cercetării este mai fluctuant și mai ambiguu, cu atît investigarea acestui obiect reclamă un limbaj mai riguros, pentru a compensa astfel natura singulară a obiectului. În această privință, singurul limbaj acceptabil este cel științific, în accepția considerată de Servien. Nu trebuie să confundăm *LS* al lui Servien cu diferitele realizări concrete ale acestui limbaj, sub forma textelor de diferite specialități tehnico-științifice, realizări impregnate de elemente străine, ale limbajului cotidian și chiar ale celui poetic, sub forma a diferite conotații, imprecizíuni etc. Am putea spune chiar că *LS* reprezintă de cele mai multe ori o tendință, nu un stadiu atins. Tot așa, limbajul poetic (*LP*) al lui Servien nu poate fi confundat cu diferitele sale realizări individuale, sub forma unor opere poetice determinate, opere din care este greu să se fi eliminat toate reziduurile rutinare ale limbajului cotidian.

Este în afară de orice îndoială că din punct de vedere genetic *LS* și *LP* își au sursa în limbajul uzual. Dar aceasta nu le împiedică să fie esențial diferite din punct de vedere structural și să fie mai simple, fiecare în felul său, decît limbajul matcă din care s-au desprins. Se întîmplă deseori în știință ca ordinea metodologică optimă pentru înțelegerea și prezentarea lucrurilor să fie diametral opusă ordinii lor genetice. Tocmai așa se petrec lucrurile și cu limbajele în discuție. Deși *LS* și *LP* își au sursa în limbajul cotidian, acesta din urmă este mai complex, mai eterogen decît cele dintîi; el se prezintă ca un amestec de elemente de comunicare (aparținînd *LS*) și elemente de expresie (aparținînd *LP*).

Există patru combinații în utilizarea limbajelor *LS* și *LP* ca limbaje obiect și ca metalimbaje (dacă am adăuga și limbajul uzual, numărul combinațiilor s-ar mări simțitor): *a)* *LS* = limbajul obiect, *LS* = metalimbajul; aici intră cercetările de metamatematică; *b)* *LS* = limbajul obiect, *LP* = metalimbajul; aici intră unele comentarii poetice

asupra limbajului matematic; pagini memorabile de acest fel aparţin poetului Ion Barbu; unele fragmente au fost reproduse în capitolul pe care i l-am dedicat în această carte; *c)* *LP* = limbajul obiect, *LP* = metalimbajul; aici intră acele texte de critică literară care realizează un comentariu despre *LP* în termenii aceluiaşi limbaj; justificarea epistemologică a unui asemenea demers ar fi aderenţa la obiect pe care trebuie s-o realizeze actul critic, pentru a fi cît mai pertinent; aici se înscriu numeroase pagini din *Istoria literaturii române* a lui G. Călinescu (atunci cînd nu abordează condiţiile externe ale operelor literare, ci structura lor imanentă); *d)* *LP* = limbajul obiect, *LS* = metalimbajul. Acesta este tipul de cercetare care defineşte estetica lui Servien. Raţiunea epistemologică a acestui demers este inversă celei de la punctul c; scopul este aici nu realizarea unei cît mai mari aderenţe la obiect, ci a unei cît mai mari distanţări de obiect. Să vedem mai îndeaproape în ce constă acest mod de abordare.

Operînd o selecţie în mulţimea proprietăţilor pe care Servien le atribuie *LS* şi în mulţimea proprietăţilor atribuite *LP*, schimbînd puţin terminologia şi precizînd puţin lucrurile, în sensul modelului pe care l-am propus în capitolul IV din *Poetica matematică*, vom spune că *LS* se defineşte prin absenţa omonimiei şi infinitatea numărabilă a sinonimiei, în timp ce *LP* se defineşte prin infinitatea nenumărabilă a omonimiei şi absenţa sinonimiei. *Estetica este deci, pentru Servien, posibilitatea de a aprecia fenomenele irepetabile şi infinit ambigue ale poeziei cu ajutorul unor expresii lipsite de ambiguitate şi înlocuibile într-o infinitate de feluri prin alte expresii, semantic echivalente.*

Marele merit al acestei viziuni despre cei doi poli ai limbajului uman (limbajul total, cum îl numeşte Servien) este reprezentarea ei sub forma unui model (în sensul epistemologiei contemporane). Cînd spunem că *B* este un model al lui *A*, înţelegem că *B* este destul de asemănător cu *A* pentru ca rezultatele obţinute în studiul lui *B* să păstreze o anumită pertinenţă şi în raport cu *A*; dar, în acelaşi timp, *B* este destul de diferit de *A* pentru a face posibilă existenţa unei metode compatibile cu natura lui *B*, dar incompatibile cu natura lui *A*. Aceste două exigenţe care vin una împotriva alteia îşi au justificarea în faptul că metoda modelării are ca scop investigarea (indirectă) a unui obiect printr-o metodă incompatibilă cu natura sa (investigarea

corpului uman viu prin metoda experimentală; investigarea limbajului natural printr-o metodă axiomatic deductivă etc.). Acea distanţare faţă de obiect pe care o preconiza Servien vine tocmai în întîmpinarea dezideratului al doilea, privind diferenţa obligatorie de natură între obiect şi modelul său. Rămîne ca, în cadrul *LS*, cu mijloacele specifice lui, să se simuleze cît mai adecvat fenomenele din *LP*. Este deci clar că Servien a pus jaloanele modelării logice deductive a limbajului poetic. Judecată în raport cu momentul în care această întreprindere a avut loc (1931), trebuie să-i recunoaştem caracterul ei de pionierat, imensa ei valoare anticipativă. Într-adevăr, metoda modelării, destul de veche în ştiinţele naturii — în special în fizică — era aproape necunoscută în disciplinele umaniste şi sociale, pătrunderea ei în această zonă generalizîndu-se abia în ultimii 20 de ani, odată cu dezvoltarea ciberneticii şi a calculatoarelor electronice. Distanţarea de obiect pe care o introduce metoda modelării nu este decît o trambulină pentru o nouă apropiere, şi mai intimă, de natura obiectului, dar această apropiere este condiţionată tocmai de caracterul ei indirect. În schimb, acea aderenţă la obiect pe care o realizează abordarea de la punctul c nu este decît o insinuare în interiorul obiectului, insinuare care poate avea, eventual, efectul unei iniţieri magice în structura obiectului, dar care ne îndepărtează considerabil de o cunoaştere lucidă a acestuia.

Concomitent cu Servien, îşi elaborau punctul lor de vedere alţi doi savanţi care preconizau utilizarea metodelor matematice în studiul artei: G. D. Birkhoff şi Matila Ghyka. Deoarece lui Matila Ghyka îi dedicăm, în această carte, cîteva consideraţii speciale, ne vom referi la contribuţiile lui G. D. Birkhoff, pentru a pune astfel mai bine în evidenţă originalitatea contribuţiei lui Servien. În centrul preocupărilor lui Birkhoff (*Quelques éléments mathématiques de l'art*, Atti del Congresso Internazionale dei Matematici, Bologna, 1928; *Polygonal forms*, Sixth Yearbook of the National Council of Teachers in Mathematics, 1931; *A mathematical approach to Aesthetics*, „Scientia", 1931; *A mathematical theory of Aesthetics*, The Rice Institute Pamphlet, 1932; *Aesthetic measure*, Cambridge, 1933) se afla problema de a se găsi o măsură a esteticităţii, privită din punctul de vedere al receptorului. Nu vom insista asupra acestei chestiuni, căreia i-am dedicat un paragraf

în *Poetica matematică* (pp.20—21). Vom aminti doar faptul că Birkhoff a avut în vedere în special artele vizuale, în domeniul cărora anumiţi parametri geometrici permit aprecierea gradului de ordine a elementelor şi a gradului de complexitate pe care o prezintă o structură vizuală suficient de cuantificată. Plăcerea estetică produsă de această structură este, după Birkhoff, direct proporţională cu ordinea şi invers proporţională cu complexitatea structurii. Ulterior, parametrii consideraţi de Birkhoff au putut fi înglobaţi într-o viziune mai cuprinzătoare, al cărei suport îl constituie teoria matematică a informaţiei (Max Bense, Rul Gunzenhäuser, Abraham Moles, citaţi deja în *Poetica matematică*; la ei adăugăm acum pe Sigfried Maser, cu cartea *Numerische Aesthetik*, Stuttgart, 1970—1971), care se aplică cu succes ori de cîte ori este vorba de a se măsura o cantitate de informaţie selectivă (deci care rezultă din selectarea unei variante dintre mai multe posibile). Informaţia selectivă este foarte importantă în artele vizuale şi în muzică, dar mai puţin importantă în artele cuvîntului, dominate de informaţia semantică. Probabil că ideile lui Birkhoff pot fi încă dezvoltate, de exemplu, combinînd cunoştinţele despre simetrie — în sensul cărţii lui H. Weyl din 1952, tradusă şi în româneşte — şi teoremele de geometrie combinatorie cu mijloacele teoriei informaţiei, dar această direcţie de cercetare nu va putea avea un impact important asupra teoriei literaturii. Mai important este însă un alt fapt. Validînd ideile lui Birkhoff despre diferite moduri de a măsura ordinea şi complexitatea structurilor vizuale, estetica informaţională nu a putut reţine interpretarea axiologică dată de către Birkhoff parametrilor săi. Astăzi, încercarea lui Birkhoff de a măsura „plăcerea estetică" apare naivă, existînd un acord unanim asupra faptului că parametrii numerici se referă la structura, nu şi la valoarea operei de artă. Dealtfel, ordinea pe care şi-o propune s-o măsoare Birkhoff se află într-un raport determinat cu entropia, iar despre aceasta din urmă s-a arătat în anii din urmă că nu măsoară nici valoarea estetică, nici absenţa ei. Putem deci spune că estetica a reţinut şi a dezvoltat tehnicile lui Birkhoff, nu şi concepţia estetică a acestui autor. Cu totul altfel se prezintă lucrurile în ceea ce-l priveşte pe Servien, căruia dezvoltarea contemporană a esteticii i-a validat atît concepţia generală, cît şi tehnicile de investigaţie (în special în ceea ce priveşte structurile

Scanned with CamScanner

ritmice, deoarece studiul său asupra celor doi poli ai limbajului total nu comportă aspecte tehnice speciale). Axiomatica lui Servien, deşi într-un stadiu structural doar incipient din punct de vedere matematic, demonstrează o deosebită putere explicativă, permiţînd să se regăsească un mare număr de trăsături importante ale limbajului poetic şi ale celui ştiinţific (a se vedea şi articolele noastre *Two poles of the human language*, I, II, III, „Revue roumaine de linguistique", 1970, no.3, 4, 5) şi se pretează la o matematizare care-i conferă un înalt grad de formalizare (capitolul IV din *Poetica matematică*). Cadrele esteticii lui Servien sînt destul de largi pentru a putea include teoria caracterului deschis al operei poetice (în sensul lui Umberto Eco), reprezentarea acestei opere ca o mulţime de conotaţii singulare (Hjelmslev, Sörensen, Johansen şi, în special, Tzvetan Todorov, *Littérature et signification*, Larousse, Paris, 1967), capacitatea limbajului poetic de a fi mai mult decît un vehicul al semnificaţiei, de a fi el însuşi o lume care se află într-o metamorfoză semantică fără sfîrşit (grupul Tel Quel, concepţiile lui Max Bense din „Zusammenfassende Grundlegung moderner Ästhetik", *Mathematik und Dichtung, Nymphenburger Verlagshandlung*, München, 1965, poezia concretă a lui Pierre Garnier, *Spatialisme et poésie concrète*, Gallimard, Paris, 1968), ideile lui Paul Valéry privind tendinţa limbajului poetic de a persista ca limbaj după momentul în care a fost sesizat (*The art of poetry*, D. Folliot, tr, New York, 1958). Toate aceste fapte, nu numai că-şi găsesc locul în axiomatica lui Servien, dar ele primesc aici o expresie unitară şi devin susceptibile de o investigare bazată pe tehnicile matematicii moderne, aşa după cum se va vedea în cele ce urmează.

Pentru un ochi care nu este obişnuit cu metodologia matematică, există probabil unele dificultăţi în sesizarea semnificaţiei reale a contribuţiilor lui Servien. Într-adevăr, ambiguitatea şi non-echivalenţa semantică a expresiilor poetice sînt lucruri de mult cunoscute. Există o sumedenie de alte proprietăţi ale limbajului poetic, de numeroase ori subliniate de la Aristotel, trecînd prin Hegel, pînă în zilele noastre. Meritul lui Servien constă în intuirea ordinii de importanţă a proprietăţilor limbajului poetic, în faptul de a fi sugerat ierarhia lor şi de a fi schiţat modul de trecere la o abordare axiomatic-deductivă a acestui limbaj ; Servien a reuşit să distingă între proprietăţile primare (deci

ireductibile la altele,mai simple) și proprietățile derivate, care-și găsesc deci locul nu printre proprietățile-axiome, ci printre proprietățile-teoreme. În același timp, ideea de a pune față în față limbajul obiect și metalimbajul dă poeticii lui Servien o eleganță și o precizie necunoscute în acest domeniu.

Poetica este deci studiul expresiilor poetice cu ajutorul celor științifice. Alternativele propuse ca replică la acest punct de vedere (poetica este știință și artă în același timp ; poetica nu este nici știință, nici artă ; poetica este o artă) sînt doar niște jocuri de cuvinte, dacă nu niște simple neînțelegeri. Se manifestă de multe ori o viziune simplistă, anacronică, despre activitatea științifică, o viziune după care numai lucrurile raționale și explicabile pot forma obiectul unei atari activități. De aici pînă la concluzia imposibilității unei estetici științifice nu este decît un pas ; într-adevăr, poezia este, prin natura ei, irațională și inefabilă. Se ignoră faptul că, după exemplul altor discipline, estetica poate utiliza și ea metoda modelării matematice, metodă în baza căreia inefabilul poetic se reprezintă ca limită a unui șir infinit de aproximații explicabile (în felul în care numerele iraționale sînt limite de șiruri infinite de numere raționale). Metoda modelării sacrifică deci caracterul exhaustiv al descrierii și natura specifică a faptului estetic, cîștigînd în schimb în rigoare și în profunzime. Pius Servien și-a devansat epoca, deoarece a preconizat (cel puțin implicit) utilizarea metodei modelării, cu cîteva zeci de ani înainte ca ea să fie acceptată în estetică. Această situație explică audiența relativ redusă a concepțiilor lui Servien printre esteticienii timpului său.

Mai există un aspect al esteticii lui Servien care ar putea explica slabul ei ecou. Elaborînd o concepție originală asupra naturii limbajului poetic, Pius Servien nu a indicat, nici măcar într-un mod sumar, cum s-ar putea utiliza această concepție în studiul efectiv al unei opere poetice determinate. De multă vreme, limbajul poetic este identificat, în realizările sale, la nivelul figurilor, atenția cercetătorilor fiind îndreptată asupra structurilor deviante. Dar esența limbajului poetic nu rezidă în aceste devieri, care, prin ele însele, nu pot crea poezie. Se folosește deci, ca reprezentare aproximativă a limbajului poetic, limbajul figurat, dar, în mod paradoxal, nu se știe bine ce anume se aproximează. Situația este agravată de faptul că gradul de figu-

Scanned with CamScanner

rare este apreciat în raport cu limbajul uzual, al cărui statut științific este foarte obscur. Tocmai în direcția îndepărtării acestei lacune acționează estetica lui Servien; această estetică ne permite să înțelegem pe o cale indirectă (anume, prin metoda modelării) esența limbajului poetic, la un nivel de abstracție și de generalitate prea ridicat pentru a se putea pune problema unei utilizări directe a rezultatelor în analizele poetice pe text. Reprezentarea dată de Servien ne permite să înțelegem ce anume se aproximează atunci cînd demersul nostru vizează identificarea unor conotații, sub forma unor figuri metaforice sau metonimice; înțelegem astfel că adevăratul termen de referință în investigarea limbajului poetic nu este limbajul uzual, ci limbajul științific, deoarece figurile interesează, într-un text poetic, numai în măsura în care ele reprezintă niște conotații, iar gradul de conotativitate se apreciază în raport cu *LS* al lui Servien, despre care se poate arăta că este pur denotativ.

O altă nemulțumire generată de estetica lui Servien se referă la problema valorii estetice. Spre deosebire de Birkhoff, Servien n-a manifestat niciodată veleitatea de a măsura „artisticitatea" unei opere de artă. Totuși, aspectele axiologice sînt implicate în însăși țesătura esteticii lui Servien. Este de altfel semnificativ faptul că, pentru a pune în evidență nevoia de colaborare între *LS* și *LP*, Servien imaginează două personaje simbolice: cel care observă și cel care alege. Iată cum descrie el activitatea acestora, în legătură cu creația muzicală. Cel care observă este condamnat să examineze violoncelul, partitura, fără nici o aluzie la sensul lor muzical, la conținutul lor de frumusețe. Acest observator va fi un matematician; sau un fizician, dacă studiază vibrațiile aerului într-o sală de concert. Mai general, el este un om care nu vrea să cunoască, din limbajul total, decît o anumită parcelă, *LS*. Însă acest personaj simbolic nu este suficient pentru cercetare. Pentru a nu-și pune probleme artificiale, el are nevoie de un al doilea personaj, un fel de cobai, un personaj simbolic care se mișcă în celălalt domeniu, în *LP*. Acesta din urmă efectuează alegeri, alege în primul rînd ceea ce i se pare frumos. Această separare a cercetării în două personaje simbolice, cel care observă și cel care alege, exprimă dorința lui Servien de a menține permanent separate demersurile în termeni de *LS* de cele în termeni de *LP*. (*Esthétique*,

p.77). Dar, observă Servien, metoda celor două personaje, metodă pe care o identifică cu o estetică generalizată, precede știința; ea servește doar pentru a discerne și organiza o critică metodică și conștientă (*Esthétique*, p.82). Estetica științifică începe în momentul în care cele două personaje colaborează. Cel care alege reprezintă detectorul de valoare estetică, iar cel care observă este înarmat cu ceea ce este necesar pentru a se investiga structura operelor de artă. Într-un estetician calificat, cele două personaje trebuie să fie reprezentate în egală măsură. Acel *LL* al lui Servien constituie o idealitate care poate fi luată ca termen de referință pentru aprecierea gradului de poeticitate al unei opere; anume, acest grad crește atunci cînd devierea operei considerate în raport cu *LL* scade. Mai precis, cu cît un text răspunde într-o măsură mai mare la exigența omonimiei infinite nenumărabile și la aceea a sinonimiei nule, cu atît el este mai poetic. S-a discutat, într-adevăr, deseori despre capacitatea marilor opere de artă de a genera mereu noi și noi semnificații; ea rezultă din prima exigență, care include, fără îndoială, toate implicațiile umane și sociale ale operei poetice. În ceea ce privește cea de-a doua exigență, ea exprimă faptul că, cu cît o operă este mai poetică, cu atît mai puțin ea este susceptibilă de echivalențe sinonimice în vreuna din componentele ei. E aici formularea riguroasă a unei intuiții familiare oricărui cititor, intuiție conform căreia, cu cît o operă este mai poetică, cu atît mai puțin este posibilă vreo modificare (adăugire, suprimare, înlocuire) a unui element al ei.

Dacă, în principiu, așa cum am văzut mai sus, idealitatea pe care Servien o propune ca prototip al limbajului poetic este, în același timp, expresia supremă a valorii poetice, măsurarea efectivă a ecartului unei opere în raport cu acest termen de referință rămîne un deziderat a cărui realizabilitate este înscrisă, probabil, în însăși complexitatea sa.

Luînd ca punct de plecare opozițiile stabilite de Servien între *LS* și *LP* și ținînd seama de cercetările noastre din 1970, semnalate mai sus, și mai cu seamă de cele din 1974 (*Fifty-two oppositions between scientific and poetic communication*) vom prezenta acum o versiune ameliorată a acestor opoziții. Vom include și unele false opoziții, datorită faptului că sînt acceptate de un număr mare de autori, dar ne

vom distanţa de ele în comentariu (dacă nu am făcut-o deja mai sus):

	LS	*LP*
(1)	raţional	emoţional
(2)	explicabil	inefabil
(3)	luciditate	vrajă
(4)	semnificaţii generale şi universale	semnificaţii singulare şi locale
(5)	semnificaţii obiective	semnificaţii subiective
(6)	fixitate în spaţiu (independenţă în raport cu cititorul sau ascultătorul)	variabilitate în spaţiu (dependenţa de lectură)
(7)	constanţă în timp	variabilitate în timp
(8)	dominat de om	domină pe om
(9)	utilizarea expresiilor artificiale	utilizarea exclusivă a expresiilor din limba naturală
(10)	rol esenţial al expresiilor artificiale	rol secundar al expresiilor artificiale
(11)	utilizare rutinară a limbajului (toate mijloacele lingvistice au un caracter convenţional)	utilizarea creatoare a limbajului (tendinţa către inovaţia lingvistică)
(12)	transparenţă (limbajul este doar o fereastră prin care privim la semnificaţia ştiinţifică)	opacitate (fereastra este neagră, ea opreşte privirea noastră şi capătă o semnificaţie în sine)
(13)	tranzitiv (semnificaţia ştiinţifică poate fi comunicată de la o persoană la alta)	reflexiv (semnificaţia poetică are tendinţa de a fi îndreptată către eul poetului)
(14)	densitate logică	densitate de sugestie
(15)	uitarea limbajului, după folosirea lui	persistenţa limbajului
(16)	traductibilitate	intraductibilitate
(17)	relativă independenţă în raport cu expresia	dependenţă strictă în raport cu expresia
(18)	independenţă relativă în raport cu structura muzicală	dependenţă strictă în raport cu structura muzicală
(19)	preponderenţa aspectelor paradigmatice	preponderenţa aspectelor sintagmatice
(20)	contexte scurte sînt suficiente pentru a determina semnificaţiile (tendinţă spre independenţă de context)	semantica poetică are nevoie de contexte largi (tendinţă de creştere a dependenţei de context)
(21)	preponderenţa semnificaţiilor conceptuale (definiţionale)	preponderenţa semnificaţiilor neconceptuale (contextuale)

Scanned with CamScanner

(22)	preponderența aspectului grafic	preponderența aspectului sonor
(23)	sinonimie infinită	absența sinonimiei
(24)	absența omonimiei	omonimie infinită
(25)	existența frazelor de semnificație nulă	absența frazelor de semnificație nulă
(26)	mulțime numărabilă de semnificații	mulțime nenumărabilă de semnificații
(27)	mulțime discretă de semnificații	mulțime continuă de semnificații
(28)	concordanță între numărul cardinal al mulțimii de expresii și numărul cardinal al mulțimii de semnificații (amîndouă sînt numărabile)	neconcordanță între cele două numere cardinale (primul este numărabil, al doilea este puterea continuului)
(29)	posibilitatea de a rezolva ambiguitățile prin trecere la un nivel superior de abstracție sau la un context mai larg	existența unor ambiguități esențiale
(30)	stereotipii generale și convenționale	stereotipii particulare și originale
(31)	denotație (tendința de a utiliza semnificațiile pe baza unui dicționar)	conotație (tendința de a utiliza expresiile într-o accepțiune diferită de accepțiunea lor de bază)
(32)	existența problemelor de stil (alegerea între expresii sinonimice)	absența problemelor de stil (în sensul retoricii clasice)
(33)	utilizare esențială a metaforelor	utilizarea neesențială a metaforelor
(34)	absența opoziției dintre metaforă și un termen neexpresiv	posibilitatea dezvoltării funcției metaforice în opoziție cu un termen neexpresiv
(35)	existența metaforelor omogene (ambii termeni între care se exercită analogia aparțin aceluiași limbaj: *LS*)	eterogeneitatea tuturor metaforelor (un termen aparține limbajului uzual, iar celălalt lui *LP*)
(36)	posibilitatea metaforelor de ordin superior (o metaforă de ordinul n este rezultatul unei analogii cu o metaforă de ordinul $n - 1$)	imposibilitatea metaforelor de ordin mai mare ca unu
(37)	pertinența opoziției *adevărat-fals* (în sensul logicii bivalente)	nepertinența opoziției *adevărat-fals*
(38)	pertinența opoziției *gramatical-negramatical*	nepertinența opoziției *gramatical-negramatical*

Scanned with CamScanner

(39) utilizarea sistemelor formale cu scopul de a se studia frazele corecte	utilizarea sistemelor formale cu scopul de a se studia diferite grade de necorectitudine
(40) o distanţă paradigmatică mare implică o distanţă sintagmatică mare	distanţe sintagmatice mici asociate unor distanţe paradigmatice mari
(41) o distanţă paradigmatică mică implică o distanţă sintagmatică mică	distanţe sintagmatice mari asociate unor distanţe paradigmatice mici
(42) irelevanţa tezei lui Roman Jakobson	validitatea tezei lui Jakobson privind proiecţia principiului echivalenţei de pe axa selecţiei pe axa combinării
(43) tendinţă către utilizarea sistematică a figurilor metaforice şi a celor metonimice	tendinţă de emancipare în raport cu limbajul figurat
(44) tendinţă de utilizare a semnelor motivate (iconice sau indiciale)	tendinţă de utilizare a semnelor nemotivate (simbolice)
(45) centrare asupra contextului	centrare asupra mesajului
(46) înalt grad de predictabilitate	grad coborît de predictabilitate
(47) irelevanţa analogului informaţional al celui de-al doilea principiu al termodinamicii	relevanţa acestui analog (în sensul preconizat de Octav Onicescu; a se vedea şi capitolul VI din *Poetica matematică*)
(48) structură logico-algebrică a semanticii	structură topologică a semanticii
(49) importanţa contextului extralingvistic	tendinţa de utilizare exclusivă a contextului lingvistic
(50) proiectivitatea sintactică a celor mai multe propoziţii (dacă *a* este subordonat lui *b*, atunci orice termen intermediar este subordonat lui *b*)	tendinţa de creştere a numărului de propoziţii neproiective
(51) validitatea proprietăţii lui Tesnière a celor mai multe propoziţii (fiecare termen are cel mult un regent)	tendinţa de încălcare a proprietăţii lui Tesnière
(52) distanţă normală între un termen dependent şi regentul său	tendinţă de abatere — într-un sens sau altul — de la distanţa normală între termenul dependent şi cel regent
(53) caracter esenţial predicativ	tendinţă de utilizare a unor moduri verbale nepredicative

Scanned with CamScanner

Opoziţiile (1), (16), (23), (24), (25) şi (32) sînt cele care, în mod explicit, sînt prezente la Servien. Asimilînd *LP* cu limbajul faptelor de emoţie, Servien a considerat oportun să substituie lui *LP* pe *LL*; dar limbajul liric nu este decît *una* din ipostazele limbajului poetic. Pentru acest motiv şi pentru cele arătate mai sus, opoziţia (1) nu se susţine. Roman Jakobson are mari merite în demonstrarea inconsistenţei opoziţiei (1); într-adevăr, el a definit funcţia poetică a comunicării umane drept aceea centrată asupra mesajului (nu asupra emiţătorului), deci orice confuzie între *LL* şi *LP* devine imposibilă. Dar negînd opoziţia (1), Jakobson a substituit acesteia o opoziţie care ni se pare tot atît de contestabilă: în timp ce *LP* este centrat asupra mesajului, *LS* nu este centrat asupra mesajului (se discută în momentul de faţă dacă funcţia primordială în *LS* este cea referenţială sau cea metalingvistică; a se vedea, în acest sens, punctul de vedere al Sandei Golopenţia-Eretescu prezentat în *Formalized languages:scientific* în „Current Trends in Linguistics", vol. XII, Mouton, 1974 şi punctul nostru de vedere prezentat în *The semiotics of scientific languages* în Actele Congresului internaţional de semiotică, Milano, 1974). Dacă am accepta propunerea lui Jakobson, atunci am obţine paradoxalul rezultat conform căruia jocurile de cuvinte, de tipul criptogramelor, anagramelor şi al rebusurilor, sînt o manifestare prin excelenţă poetică. Calculele algebrice sînt şi ele, uneori, centrate asupra lor, dar ar fi greu să acceptăm că funcţia lor dominantă este cea poetică.

Nu este greu de văzut că un mare număr de proprietăţi ale *LS* decurg direct din proprietatea (23) căreia Servien i-a întrevăzut caracterul fundamental. Multe alte proprietăţi, dacă nu decurg din (23), sînt favorizate de aceasta din urmă.

Opoziţia (2) este doar parţial adevărată. Teorema lui Gödel, asupra imposibilităţii formalizării complete a aritmeticii, atrage atenţia asupra „inefabilului" unuia dintre cele mai riguroase domenii ale ştiinţei. Acest fapt pune întrucîtva sub semnul întrebării opoziţiile (3), (8) şi (11). Dar (3) este parţial adevărată şi în baza lui (4), aşa cum (8) rezultă din (23), a cărei sursă se află, în bună măsură, în (14) şi (21). Adevărul lui (8) rezidă în faptul că în *LS* putem *alege* o expresie dintr-o infinitate, în timp ce în *LP* fiecare expresie este *impusă* de semnificaţia ei. Din (23) rezultă (16), (17) şi (18). Traducerea din L_1 în L_2

constă în găsirea, în L_2, a unor expresii sinonimice unor expresii date din L_1. Aceasta este totdeauna posibil în *LS*, deoarece familia de sinonime ale unei expresii are reprezentanţi în toate limbile naturale. Opoziţia (24) este doar o aproximare a opoziţiei mai fine (29). Alături de ambiguităţile care pot fi eliminate cu ajutorul contextului, *LP* cunoaşte unele ambiguităţi esenţiale. Prezenţa lor îşi are originea atît în structura internă a textului poetic (opoziţia 31), cît şi în proprietatea de *feed-back* a *LP* (opoziţiile (5), (6) şi (7)). Din păcate (31) este de multe ori confundată cu opoziţia nemetaforic-metaforic. Dar multe metafore sînt denotative şi multe conotaţii nu au caracter metaforic. Explicaţii detaliate relative la statutul metaforei în *LS* pot fi găsite în *Poetica matematică.* Colin Cherry observă că, după o lungă folosire, multe cuvinte metaforice devin incorporate în limbă şi pierd semnificaţia lor iniţială, încetînd de a mai fi gîndite ca metafore (*On human communication,* MIT Press, Cambridge, Mass, 1966). Există deci un proces de transformare a metaforelor poetice în metafore lingvistice. Un fenomen similar (dar nu identic) se petrece cu metafora matematică; dar evoluţia acesteia din urmă se efectuează într-un sens opus: în loc să degenereze, ea generează noi metafore matematice, de un ordin superior. În schimb, nu există posibilitatea unor metafore poetice de ordin superior, deoarece în momentul în care s-ar naşte o metaforă poetică de ordinul al doilea, cea de ordinul întîi care a generat-o ar înceta de a mai fi poetică. Are deci loc (37).

În relaţie cu (33), (34) şi (35) se află opoziţiile (43) şi (44). Arta clasică era bazată pe principiul mimesisului şi al relaţiilor de contiguitate, în timp ce arta modernă intră într-o relaţie mult mai indirectă cu obiectele lumii reale, fapt care o aşează sub influenţa dominantă a semnelor nemotivate. După cum am arătat recent, în Raportul la Congresul de la Milano, *LS* generează în mod sistematic şi esenţial nu numai metafore, ci şi metonimii. Întregul *LS* este deci dominat de semne motivate, unele iconice, altele indiciale. Distincţiile semiotice ale lui Peirce capătă aici o înaltă funcţie explicativă.

Ogden şi Richards disting între utilizarea simbolică şi utilizarea emotivă a limbajului, iar Colin Cherry consideră (ca şi Ogden şi Richards) că poezia se poate în bună măsură dispensa de utilizarea simbolică a limbajului. Dezvoltarea

poeziei moderne pune în evidență o mișcare inversă, în cadrul căreia semnul poetic se emancipează de semnele motivate, evoluînd către o simbolicitate din ce în ce mai accentuată. Dar desprinzîndu-se de semnele iconice și de cele indiciale (semne care, cum am arătat, cîștigă în schimb teren în *LS*), *LP* devine din ce în ce mai puțin explicabil prin prezența figurilor de tip metaforic sau metonimic, figuri care constituie obiectul principal al celor mai multe analize de texte poetice. Se conturează astfel o criză a tehnicilor de investigație poetică, a cărei rezolvare nu va putea fi obținută fără ajutorul semioticii.

Opozițiile (14), (23), (24), (9), (16), (32), (4), (5), (6), (7), (26), (27), (28), (12), (13), (17), (18), (19), (40), (41), (42) au fost argumentate chiar în această ordine în primul nostru articol din 1970 asupra celor doi poli ai limbajului uman; opozițiile (20), (37), (31), (11), (30), (2), (46), (47), în cel de-al doilea articol din 1970, iar (25), (15) și, din nou (40), (41) și (42) în cel de-al treilea articol din 1970. Într-o formă puțin diferită, opoziția (22) a fost indicată de Leonard Bloomfield (*Linguistic aspects of science*, 1939). Ar trebui poate s-o completăm cu observația că aspectul grafic este, pentru *LP*, mult mai important decît cel sonor pentru *LS*. Poezia comportă o organizare polidimensională (în versuri, strofe etc.) și, uneori, o scriere spațială (Apollinaire, poezia concretă, poezia spațială) aceste fenomene vizuale neputînd fi echivalate în structuri auditive. Cîteva cuvinte despre opoziția (39). Sistemele formale (începînd cu Hilbert) constituie un mod de a se investiga structura teoremelor, adică a secvențelor corect formate (din punct de vedere logic). Începînd cu Chomsky, sisteme formale de tipul sistemelor combinatorii și al anumitor tipuri de automate sînt utilizate în investigarea și generarea secvențelor corect formate din punct de vedere gramatical. Însă corectitudinea este relativă. O secvență e corectă în raport cu un anumit mecanism generativ. Un anumit grad de corectitudine este important ca termen convențional de referință, în investigarea comparativă a diferitelor secvențe care nu sînt corecte, tot așa cum alegerea unui punct-origine și a unei unități de măsură este necesară atunci cînd vrem să comparăm pozițiile relative ale punctelor pe o dreaptă. Tocmai acesta este rolul sistemelor formale în studiul limbajului poetic, unde diferite tipuri de conotații introduc diferite niveluri de semiadevăr

şi de semigramaticalitate (opoziţiile (37) şi (38)), prin secvenţe care se abat de la corectitudinea aleasă ca termen de referinţă. Aceasta este, în esenţă, problema dificilă a măsurării diferitelor grade de conotativitate pe care am încercat s-o rezolvăm în capitolele V şi VII din *Poetica matematică*.

Unii autori apără opoziţia (46). Ea îşi are probabil originea într-un cunoscut principiu, conform căruia poezia rezultă dintr-o aşteptare frustrată, care implică o creştere a nedeterminării mesajului estetic. Lucrurile se petrec într-adevăr aşa, dacă avem în vedere conotaţiile deosebit de îndrăzneţe pe care le întîlnim în poezia modernă, dar acesta este numai un aspect al chestiunii. Există şi o altă tendinţă, care acţionează într-un sens opus, tendinţa de a micşora nedeterminarea mesajului poetic, prin introducerea unei organizări globale riguroase. Astfel, un poem este rezultatul unui proces alcătuit din două niveluri : la primul nivel avem un mare număr de dezordini locale (în raport cu ordinea limbajului cotidian), care implică o creştere a nedeterminării ; la al doilea nivel întîlnim o ordine de gradul al doilea, o ordine pur globală, care creează coerenţa magică a întregului text şi are ca rezultat o micşorare a nedeterminării. Aceste două tendinţe contradictorii acţionează, cu diferite intensităţi, în orice text poetic şi nu se poate stabili nici o regulă generală asupra rezultatului lor final.

Dacă opoziţia (46) eşuează, mai adecvată ni se pare opoziţia (47). Energia informaţională (în sensul lui Onicescu, „Comptes rendus de l'Acad. Sci. Paris", 1966) este corelată cu entropia informaţională cu ajutorul unei teoreme care stabileşte, între altele, analogul lingvistic al celui de-al doilea principiu al termodinamicii. Însă acest analog exprimă o orientare, o funcţie a textului, numai atunci cînd textul este un scop în sine, aşa cum se întîmplă în discursul poetic.

Opoziţia (48) marchează una dintre cele mai adînci deosebiri dintre *LS* şi *LP*. Natura foarte cuantificată a semanticii ştiinţifice implică structura ei logico-algebrică. Cu totul alta este situaţia semanticii poetice. Ea nu poate fi descrisă în termeni de distanţă, ci numai de vecinătate. Acest lucru îl vom discuta ceva mai jos.

Opoziţia (49) este o rafinare a opoziţiei (45), dar trebuie să observăm că termenul „context" are în (45) alt înţeles

Scanned with CamScanner

decît în (49), deoarece în (45) este avut în vedere doar contextul extralingvistic.

Din opozițiile de mai sus rezultă nu numai deosebirile, dar și numeroasele asemănări dintre *LS* și *LP*, asemănări datorite faptului că ele sînt, amîndouă, limbaje de căutare, de creație: utilizarea limbilor naturale, densitate mare, ambiguitate, stereotipie, utilizarea figurilor metaforice și metonimice, utilizarea sistemelor formale în investigarea lor, relație sistematică între distanța paradigmatică și cea sintagmatică, structurare matematică a semanticii, existența unei creativități sub forma unei mulțimi finite de reguli. Această bază comună mărește interesul opozițiilor dintre *LS* și *LP*. Este interesant faptul că încă în 1929 analogia dintre artă și matematică a făcut obiectul unui eseu adînc al lui S. Buchanan (*Poetry and Mathematics*, The John Day Company, New York), pe care se pare că Servien nu l-a cunoscut, dar nici nu a fost cunoscut de către acesta.

Servien formulează și alte opoziții, cum ar fi existența-nonexistența frazelor contrare, posibilitatea-imposibilitatea de a rezuma un text, prezența-absența tendinței către cifre, sărăcia-bogăția vocabularului și sintaxei. Prima dintre aceste opoziții este înrudită cu (37), a doua cu (23), a treia este pur și simplu falsă, a patra la fel (Servien pretinde că optativul nu apare în *LS*; însă textul unui raționament prin reducere la absurd introduce în mod sistematic modul optativ). Să mai observăm că în treacăt sînt formulate de către Servien și opozițiile (4), (5), (6), (7), (27). De o deosebită acuitate ni se pare observația lui Servien conform căreia unicitatea sensului unei fraze din *LS* este un corolar al sinonimiei infinite din *LS* (pentru toate acestea a se vedea *Le langage des sciences*, 1931); este de observat că Servien nu utilizează termenii „sinonimie" și „omonimie", ci vorbește despre *LS* ca despre „l'ensemble des phrases qui admettent des équivalentes", însă sîntem încredințați că intuiția sa completa „des équivalentes en quantité infinie".

De mai multe ori, Servien pretinde a fi formulat „la première loi générale que l'on connaisse en esthétique" și care constă în faptul că toate obiectele ritmate, în muzică, în poezie sau proză, dacă sînt transcrise într-o notație numerică (după Servien, fapt totdeauna posibil), numerele astfel obținute se distribuie totdeauna după o lege simplă

(lege care variază de la caz la caz) (*Esthétique*, p.91 şi p.93). Am reprodus chiar cuvintele lui Servien: „loi simple". În cazul obiectelor exprimate prin vorbire, Servien are în vedere aici şirul de numere obţinut, aşa cum am mai arătat, prin considerarea numărului de silabe pînă la prima silabă accentuată (inclusiv), apoi a numărului de silabe situate după prima silabă accentuată, dar nu după a doua silabă accentuată ş.a.m.d. Procedura prin care se obţine şirul numeric asociat unei compoziţii muzicale este pe larg discutată de Servien, în cadrul problemei mai vaste a recunoaşterii temelor. Această procedură constă în reprezentarea fiecărui contur melodic prin două rînduri de cifre. Unul ai cărui termeni reprezintă succesiunea intervalelor care alcătuiesc conturul, aceste intervale fiind măsurate în semitonuri temperate. Putem conveni să reprezentăm prin cifre subliniate intervalele descendente. Al doilea rînd de cifre va fi cel al duratelor notelor succesive, luîndu-se ca unitate durata notei celei mai scurte. Putem conveni să punem o bară deasupra cifrelor care exprimă durate de note accentuate. Procedînd la analiza temelor lui Tristan şi Parsifal, Servien, pentru a nu complica scrierea, se mulţumeşte să ia în considerare doar două tipuri de accente: cele mai tari şi cele mai slabe (de exemplu, accentul primar şi accentul secundar al unei măsuri de patru timpi). Cu ajutorul celor două şiruri numerice, Servien abordează problema transformărilor temelor wagneriene (*Esthétique*, capitolul 20).

Este important de observat că întreaga teorie a ritmului este, la Servien, o proiecţie a ideii fundamentale a esteticii sale, privind folosirea celor două limbaje *LS* şi *LP*. Servien spune că ritmul este periodicitatea sesizată („périodicité perçue"), adică sesizată, simţită de către „cel care alege", dar studiată de către „cel care observă", deoarece acesta din urmă explicitează tipul de periodicitate care stă la baza unei structuri ritmice. În cazul temelor wagneriene, „cel care alege" este Lavignac (*Voyage artistique à Bayreuth*), el este cel care indică transformările care reiau aceeaşi temă.

Dar ce este acea „lege simplă" la care Servien revine atît de insistent, cînd se referă la structura ritmică a obiectelor estetice? Astăzi, această formulare apare puţin naivă, dar ea este simptomatică pentru intuiţia sigură a lui Servien. Prin „lege simplă" trebuie probabil să înţelegem

o regulă simplă de repetiţie, o regulă care se exprimă printr-o formulă pregnantă de trecere de la un termen al şirului la termenul următor. O astfel de formulă (care nu va fi unică, ci va depinde de lectură, de receptor) va genera un şir infinit, va defini deci o prelungire infinită a obiectului estetic. Recunoaştem aici, în germene, ideea de gramatică generativă a operei. Expresia „lege simplă" este oarecum pleonastică. Prin simplul fapt că succesiunea numerică este guvernată de o lege se introduce în desfăşurarea ei o anumită simplitate. S-ar putea eventual măsura această simplitate, deci spune că o lege este mai simplă decît alta, dar măsura acestei simplităţi n-ar mai fi deloc ... simplă.

O altă intuiţie prin care Servien îşi devansează timpul este aceea a restricţiilor care guvernează opera de artă. Vorbind despre mişcarea de libertate şi despre mişcarea de constrîngere care acţionează într-o operă, Servien face o observaţie de o deosebită acuitate, în spiritul celor mai recente rezultate în ceea ce priveşte modelarea matematică în estetică (*Esthétique,* p.121): „... un peintre est prisonier d'une certaine technique ... mais le fait de répéter cette technique, le fait qu'un Rubens peint si souvent d'une façon qui est techniquement la même, révèle combien la part du mouvement libre est moindre qu'on ne le croirait d'abord". Se află aici anticipate numeroasele restricţii de ordin combinator sau statistic, informaţional sau psihologic pe care cercetarea din ultimele decenii a reuşit să le expliciteze (legea lui Zipf, proprietatea de proiectivitate sintactică, proprietatea lui Tesnière de unicitate a regentului, proprietatea lui Yngve asupra lungimii structurilor regresive etc.). O altă intuiţie interesantă, care avea să fie şi ea confirmată ulterior, prin cercetările lui I. Xenakis şi colaborarea acestuia cu Le Corbusier, este aceea privind legătura profundă a muzicii cu arhitectura (*Esthétique,* p.150).

Fără îndoială, se pot găsi destule observaţii în textele lui Servien care nu au fost validate de dezvoltarea ulterioară a ştiinţei. Unele dintre ele au fost semnalate mai sus, la ele putem adăuga altele. Astfel, o exagerare evidentă este plasarea globală a criticii plastice în categoria celor care nici nu-s în stare să vadă cu ochii lor, nici nu sînt capabili să urmeze un sfat bun, o sugestie a altuia, mai competent. (*Esthétique,* p.112). Există apoi o repulsie faţă

de utilizarea aparatelor, a maşinilor în investigarea limbajului. Dar tocmai această utilizare a adus în actualitate multe din ideile sale. Servien dedică pagini deosebit de interesante problemelor de stil în *LS*, cu referire specială la stilul memoriilor de matematică ale lui Poincaré, Hermite, Riemann (*Le langage des sciences*, pp.265—270). Aici, el pledează pentru stilul textelor autentice, care au condus la marile rezultate matematice şi îi reproşează lui Poincaré faptul de a fi rescris, în cadrul euclidian, pentru public, ceea ce el a parcurs de fapt în cadrul lobacevskian (H. Poincaré, *Théorie des groupes fuchsiens*, în vol.2 al operelor), înlocuind astfel calea simplă şi „regească" cu una mai complicată, mai puţin naturală (loc.cit., p.114; a se vedea şi H. Poincaré, *Science et méthode*, p.51). Servien deplînge faptul că lectura textelor autentice este înlocuită de multe ori cu studiul unor manuale şi tratate care, căutînd să fie sistematice, încetează să mai fie semnificative din punctul de vedere al modului în care rezultatele au fost descoperite. Ne exprimăm totuşi mirarea în faţa următorului text: „... il est curieux de voir que les traités et les cours sont partout, alors que les textes capitaux de Cauchy, Weierstrass, ne se trouvent que dans quelques bibliothèques ...". Înţelegem necesitatea, pentru un matematician, de a merge la reviste originale, pentru a urmări evoluţia cercetării matematice *la zi*, dar nu vedem cum s-ar putea aplica aceeaşi metodă în ceea ce priveşte matematica clasică. Ar fi chiar dăunător să cerem unui student de azi să înveţe teoremele lui Cauchy şi Weierstrass după memoriile originale ale acestora, în loc să ia cunoştinţă cu ele într-un context al matematicii actuale, din manuale sau tratate adecvate. (În afară de cazul în care studentul în cauză este interesat în probleme de istoria ştiinţei.) Aşa cum chiar Servien a observat, în *LS* este posibilă rezumarea; există un proces de integrare a teoriilor vechi în cele noi, proces fără de care ştiinţa nu s-ar mai putea dezvolta.

Ceea ce prezintă importanţă este faptul că aceste greşeli rămîn simple detalii, care nu contaminează elaborările fundamentale ale operei lui Servien. Aşa cum el observă (*Esthétique*, p.116) că Egiptul avea practica teoremei lui Pitagora mult înainte ca spiritul grec s-o fi degajat şi analizat în mod explicit, putem spune că Servien a practicat multe modalităţi contemporane ale gîndirii ştiinţifice şi, chiar dacă nu le-a cristalizat în forma lor de astăzi,

Scanned with CamScanner

le-a schițat cu o intuiție sigură. Servien nu a căzut în greșeala — pe care și azi o întîlnim la mulți cercetători — de a crede că se poate defini poezia, că se poate obține, din examinarea unor opoziții între *LS* și *LP*, o caracterizare a limbajului poetic; o echivalare a cuvîntului „poezie" în termeni de *LS* (*Esthétique*, p.24). De aici și prudența necesară în aprecierea finalității unei estetici ca aceea pe care o preconizează. Reliefînd, cu referire la Chateaubriand, o nouă formulă, a randamentului liric, sub forma unei noi proporții între durată efortul de lectură și densitatea lirică obținută, Servien adaugă imediat că, așa cum fiziologia și chimia n-au reușit încă să construiască nici măcar cea mai simplă celulă vie, obiectul unei științe a poeziei nu este acela de a ne învăța să construim, prin mijloace științifice, o poezie vie (*Esthétique*, pp.129—130). Comparație fericită — adăugăm noi — deoarece în direcția obținerii sintetice a unei celule vii s-au făcut totuși, între timp, cîțiva pași, după cum nici utilizarea mijloacelor științifice în creația artistică nu mai este considerată azi o calamitate, viziunea contemporană în acest domeniu fiind mult mai complexă și mai nuanțată.

Am accentuat mai sus meritul lui Servien ca percursor al folosirii modelelor în estetică. Vrem acum să întregim acest merit, observînd că el a intuit importanța metodologică a modelului nu doar ca analog al obiectului, dar și ca opozant în raport cu obiectul. Într-adevăr, el a argumentat pe larg necesitatea de a putea mima fenomenele din *LP* în termenii unui limbaj *de o altă natură*, deoarece numai pe această cale indirectă va putea *LP* beneficia de roadele unor metode care nu sînt compatibile cu natura sa. „Cel care alege" are nevoie de ajutorul „celui care observă".

Servien a văzut în teoria ritmului o bază comună pentru toate artele și a dezvoltat, în acest sens, numeroase analize de o deosebită acuitate, privind limbajul muzical și limbajul plastic. Este deci necesar să ne punem problema posibilităților de extindere a opozițiilor studiate, de la *LP* la alte limbaje artistice. Vor fi deci proprietăți ale limbajului artistic (*LA*) acelea care aparțin oricărui tip de *LA* (deci *LP* este un caz particular de *LA*). Opozițiile 1—8, 11—13, 15, 17, 19—21, 23—27, 29—30, 32—33, 36—39, 43—46, 48—49 nu au nevoie de nici o explicație suplimentară; ele rămîn valabile și atunci cînd înlocuim *LP* prin *LA*. Alte opoziții însă își pierd sensul la această înlocuire

Scanned with CamScanner

sau capătă un sens care urmează abia să fie clarificat. Astfel sînt: opoziţiile 9 şi 10, dependente de ceea ce s-ar putea înţelege prin *natural* şi prin *artificial* în pictură şi în muzică, de exemplu; opoziţia 14, deoarece nu există un nume muzical sau pictural al obiectelor, iar sugestia este uneori confundată, în muzică sau pictură, cu utilizarea semnelor simbolice (nemotivate), iar opoziţia 14 este înlocuită cu 44. Şi opoziţia 16 îşi pierde sensul, deoarece nu este clar cu ce fel de traducere am putea avea de-a face în pictură, de exemplu. Într-o situaţie similară se află şi opoziţia 18, deoarece nu există o structură sonoră a picturii. Pentru un motiv analog trebuie să abandonăm şi opoziţia 22. În pictură, expresia este de multe ori tot atît de continuă ca şi semantica, fapt care invalidează opoziţia 28. Este foarte greu, în pictură sau în muzică, să distingem între o semnificaţie de bază şi o semnificaţie secundară, deoarece nu există aici un dicţionar care ar putea fi luat ca referinţă; în felul acesta, opoziţia 31 nu mai are sens. Nu ştim nici ce s-ar putea înţelege, în muzică sau pictură, prin „termen neexpresiv" sau prin „limbaj cotidian", deci este nevoie de o cercetare ulterioară pentru a clarifica situaţia opoziţiilor 34 şi 35. Concepte ca „distanţa paradigmatică" şi „distanţa sintagmatică" presupun un caracter liniar şi discret al expresiei artistice, condiţie care nu este satisfăcută în artele vizuale. Putem spera că teoria recentă a gramaticilor picturale va aduce o oarecare lumină în această privinţă, astfel încît opoziţiile 40, 41, 42 şi 47 vor fi întrucîtva clarificate. O situaţie similară o prezintă opoziţiile 50, 51 şi 52.

Vom mai adăuga, pentru întreaga discuţie relativă la statutul limbajelor *LS* şi *LP*, că natura lor ideală nu se referă la aspectul lor axiologic, ci la forma lor abstractă. Mallarmé este mai apropiat de *LP* decît Apollinaire, fără a fi mai mare decît acesta din urmă (sau, dacă este, nu pentru acest motiv).

*

Să trecem acum la prezentarea modului în care ideile lui Servien au folosit ca punct de plecare pentru formalizarea semanticii din *LS* şi din *LP*. Va trebui să amintim mai întîi unele noţiuni şi rezultate din 1968, republicate în capitolul V din *Poetica matematică*.

Fie V o mulţime finită şi nevidă numită *vocabular*. Elementele din V se numesc *cuvinte*. Orice şir finit de cuvinte (diferite sau nu două cîte două) este o *frază pe V* şi se notează $a_1a_2...a_n$. Numărul n se numeşte *lungimea frazei*, iar a_i este *termenul de rang i*. Pentru comoditate, se consideră şi fraza nulă, notată cu ω, a cărei lungime este prin definiţie egală cu zero şi care este fără efect în operaţia de compunere a frazelor. Numim *limbaj* pe V orice colecţie de fraze pe V. Îl notăm $<V, L>$ sau, pur şi simplu, L. Totalitatea frazelor pe V constituie *limbajul universal*; se arată uşor că el este infinit, dar numărabil. De aici rezultă că orice limbaj este finit sau numărabil.

Fie $\mathbb{S}$ o mulţime de elemente numite *semnificaţii*. Tripletul $<V, L, \mathbb{S}>$ constituie un *suport biplan*. Orice relaţie binară ρ definită în L şi cu valori în $\mathbb{S}$ constituie, prin definiţie, o *structură semantică* pe $<V, L, \mathbb{S}>$. Sistemul de obiecte $<V, L, \mathbb{S}, \rho>$ constituie un *limbaj cu structură semantică* sau, pur şi simplu, un *limbaj semantic*. Într-un astfel de limbaj, două fraze x şi y din L sînt *sinonime* dacă $\rho(x) \cap \rho(y) \neq 0$. Numărul cardinal al intersecţiei din primul membru se numeşte *ordinul de sinonimie* al perechii de fraze (x,y). Dacă x şi y sînt sinonime, dar $\rho(x) \neq \rho(y)$, spunem că x şi y sînt *parţial sinonime*. Dacă $\rho(x) = \rho(y)$, avem *sinonimie totală*. *Indicele de sinonimie* al unei fraze x din L este numărul cardinal $i(x)$ al mulţimii obţinute prin reunirea mulţimilor $\rho^{-1}(s)$ cînd s parcurge pe $\rho(x)$. *Indicele de omonimie* al lui x este numărul cardinal al mulţimii $\rho(x)$. Două semnificaţii s şi t din $\mathbb{S}$ sînt *omonime* dacă $\rho^{-1}(s) \cap \rho^{-1}(t) \neq 0$. Numărul cardinal al mulţimii din primul membru este *ordinul de omonimie* al perechii (s,t). Două semnificaţii omonime s şi t sînt *parţial omonime* dacă $\rho^{-1}(s) \neq \rho^{-1}(t)$, *total omonime* dacă $\rho^{-1}(s) = \rho^{-1}(t)$. *Indicele de omonimie al unei semnificaţii s* este numărul cardinal al reuniunii mulţimilor $\rho(x)$, cînd x parcurge pe $\rho^{-1}(s)$. *Indicele de sinonimie al unei semnificaţii s* este numărul cardinal al mulţimii $\rho^{-1}(s)$.

Numim *limbaj fără omonimie* orice limbaj semantic $<V, L, \mathbb{S}, \rho>$ cu proprietatea că, pentru orice x din L, mulţimea $\rho(x)$ conţine cel mult un element. În general, mulţimea $\mathbb{S}$ poate fi şi nenumărabilă. Se poate arăta însă că într-un limbaj fără omonimie semnificaţiile s pentru care $\rho^{-1}(s)$ nu este vidă formează o mulţime cel mult numărabilă.

Scanned with CamScanner

Vom spune că un limbaj fără omonimie este un *limbaj științific* dacă relația ρ este definită pentru orice frază din L iar mulțimea $\rho^{-1}(s)$ este infinită oricare ar fi semnificația s din $\mathcal{S}$ pentru care $\rho^{-1}(s)$ este nevidă. Se constată că într-un limbaj științific relația ρ este o aplicație a lui L în $\mathcal{S}$; o vom nota cu f. Se vede imediat că un limbaj semantic este un limbaj științific dacă și numai dacă el este de forma $<V, L, \mathcal{S}, f>$, unde f este o aplicație a lui L în $\mathcal{S}$, iar mulțimile de nivel nevide ale lui f sînt toate infinite (obligatoriu numărabile). Putem reformula ultimul rezultat, astfel: Un limbaj lipsit de omonimie este un limbaj științific dacă și numai dacă fiecare frază din L are indicele de sinonimie egal cu infinit. Se mai arată că, fiind dat un suport biplan $<V, L, \mathcal{S}>$, o condiție necesară și suficientă pentru ca să existe o funcție $f: L \to \mathcal{S}$ pentru care $<V, L, \mathcal{S}, f>$ este un limbaj științific este ca L să fie infinit. În același timp se arată că dacă L și $\mathcal{S}$ sînt infinite, atunci există o funcție $f: L \to \mathcal{S}$ care ia o infinitate de valori și astfel încît $<V, L, \mathcal{S}, f>$ este un limbaj științific.

Un limbaj semantic este *lipsit de sinonimie* dacă, oricare ar fi frazele x și y, $x \neq y$, $\rho(x)$ și $\rho(y)$ nu au elemente comune. Se numește *limbaj poetic* orice limbaj lipsit de sinonimie, în care indicele de omonimie al fiecărei fraze este de puterea continuului.

Victor Raischi („Studii și cercetări matematice", vol. 26, 1974, no.1) a introdus, într-un limbaj semantic, operatorii γ și γ^{-1} astfel: γ este o aplicație a lui 2^L în $2^{\mathcal{S}}$, astfel încît $\gamma(x) = \rho(x)$ pentru orice x în L, iar $\gamma(X)$ este intersecția mulțimilor $\gamma(x)$ cînd x parcurge colecția nevidă X de fraze; γ^{-1} este o aplicație a lui $2^{\mathcal{S}}$ în 2^L pentru care $\gamma^{-1}(S)$ este intersecția mulțimilor $\rho^{-1}(s)$ cînd s parcurge mulțimea nevidă S de semnificații. Se arată că γ și γ^{-1} formează o conexiune Galois. Cu ajutorul lui γ și γ^{-1} se definesc două relații de dominare, după cum urmează. Fiind date două părți nevide X și Y ale lui L, V. Raischi spune că X L-domină pe Y dacă $\rho(X) \subseteq \gamma(Y)$. Fiind date două părți nevide S și T ale lui $\mathcal{S}$, S $\mathcal{S}$-domină pe T dacă $\rho^{-1}(S) \subseteq \gamma^{-1}(T)$. Se pot transpune la aceste relații de dominare numeroase proprietăți și noțiuni studiate în cartea noastră *Lingvistica matematică* în cazul unei relații de dominare care este o particularizare a relațiilor de L-dominare și de $\mathcal{S}$-dominare.

Scanned with CamScanner

Limbajele semantice pot fi de două feluri: ambigue sau neambigue, după cum ρ nu este sau este o aplicaţie a lui L în $\mathcal{S}$. Să punem $J(S) = \gamma(\gamma^{-1}(S))$ pentru orice mulţime nevidă S de semnificaţii. Raischi arată că un limbaj semantic este neambiguu dacă şi numai dacă, pentru orice semnificaţie s, avem $J(s) = \rho(\rho^{-1}(s)) = \{s\}$. Dintre limbajele semantice se detaşează clasa limbajelor cvasiambigue, caracterizate prin următoarea proprietate: Pentru orice pereche (x,y) de fraze din L, x şi y sînt sau total sinonime sau nesinonime. În ceea ce priveşte limbajele ambigue, ele pot fi de tipul I sau de tipul II. Să punem $I(X) = \gamma^{-1}(\gamma(X))$ pentru orice parte X nevidă a lui L. Un limbaj semantic ambiguu de tipul I se caracterizează prin proprietatea $I(x) = \rho^{-1}(\rho(x)) = \{x\}$ pentru orice x din L, deci apartenenţa la tipul I este echivalentă cu absenţa sinonimiei. Rezultă că un limbaj semantic ambiguu este de tipul I dacă este un limbaj cvasiambiguu. Un limbaj semantic ambiguu este de tipul II dacă nici relaţia ρ, nici relaţia ρ^{-1} nu sînt funcţii.

În orice limbaj ştiinţific: $J(s) = \{s\}$ pentru orice s din $\mathcal{S}$; mulţimile de nivel ale aplicaţiei ρ sînt în acelaşi timp clase de distribuţie şi categorii morfologice în raport cu relaţia de L-dominare. În orice limbaj poetic: $I(x) = \{x\}$ pentru orice x din L; mulţimile de nivel ale aplicaţiei ρ^{-1} sînt, în acelaşi timp, clase de distribuţie şi categorii morfologice în raport cu relaţia de $\mathcal{S}$-dominare. Opoziţia dintre cele două limbaje se realizează la nivelul limbajelor cvasiambigue.

V. Raischi („Studii şi cercetări matematice", vol.26, 1974, no.2) introduce în continuare limbajele semantice de tipul III, definite ca limbaje cvasiambigue în care există cel puţin două fraze sinonime, şi limbaje semantice de tipul IV, definite ca limbaje de tipul II care nu sînt cvasiambigue. Limbajele de tipul IV modelează limbile naturale. Unui limbaj de tipul IV i se poate asocia un anumit tip de *limbaj deviant*, sub forma unui limbaj semantic de tipul I (deci de acelaşi tip cu limbajul poetic). Se regăseşte astfel ideea reprezentării limbajului poetic ca limbaj deviant.

Tot V. Raischi, introduce, în ultima lucrare menţionată, o noţiune de distanţă d într-un limbaj semantic, noţiune conform căreia: $d(x,y) = 1$, respectiv 0 dacă x şi y sînt parţial, respectiv total sinonime; pentru x şi y nesinonime avem $d(x,y) = 2$ dacă şi numai dacă există o frază z,

Scanned with CamScanner

care este parţial sinonimă atît cu x, cît şi cu y etc. După cum se observă, este vorba de o distanţă care măsoară gradul de abatere de la situaţia de sinonimie totală. O distanţă similară se poate introduce în mulţimea semnificaţiilor.

*

Să mai reluăm cîteva noţiuni din *Poetica matematică*. Fie $<L, \mathcal{S}, \rho>$ un limbaj poetic şi fie

$$\mathcal{S} = \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathcal{S}_n$$

unde $\mathcal{S}_0$ este mulţimea semnificaţiilor neexprimate, iar $\mathcal{S}_n = \{s;\ s \in \mathcal{S},\ \rho(x_n) = s\}$, în timp ce $L = \{x_1, x_2, \ldots \ldots, x_n, \ldots\}$. Cu excepţia eventuală a mulţimii $\mathcal{S}_0$, fiecare mulţime $\mathcal{S}_n$ este de puterea continuului, deci mulţimea semnificaţiilor exprimate într-un limbaj poetic este de puterea continuului.

Pentru a putea distinge între diferitele semnificaţii ale unei aceleiaşi fraze, vom asocia unui limbaj poetic o structură nouă, numită *structura de valorificare*. Fie, în acest scop, R mulţimea numerelor reale, N mulţimea numerelor naturale. Mulţimea R trebuie gîndită aici ca mulţimea diferitelor momente — trecute sau viitoare — iar N reprezintă mulţimea indivizilor umani. Structura de valorificare constă într-o aplicaţie

$$\lambda : \mathcal{S}^* \to L \times R \times N,$$

unde $\mathcal{S}^* = \mathcal{S} - \mathcal{S}_0$. Aplicaţia λ poate fi interpretată astfel: Fiecare semnificaţie s din $\mathcal{S}^*$ este exprimată de o frază unică x din L şi este sesizată de o singură persoană n din N într-un moment t din R bine determinat al existenţei sale. Aceasta se exprimă prin egalitatea

$$\lambda(s) = <x,\ t,\ n>; \tag{2}$$

chiar din interpretarea adoptată, rezultă că trebuie să impunem, în (2), condiţia

$$s \in \rho(x). \tag{3}$$

Însă dacă o persoană n a sesizat o dată fraza x — să spunem la momentul t — el o va putea sesiza şi la orice moment t' ulterior lui t, dar de fiecare dată cu o altă semnificaţie s'.

Scanned with CamScanner

Aşadar, trebuie să admitem că din existenţa a patru elemente s, x, t şi n care satisfac relaţiile (2) şi (3) rezultă existenţa unui $t_0 > t$, astfel încît fiecărui t' pentru care $t < t' < t_0$ să-i corespundă o semnificaţie $s' \in \rho(x)$ cu proprietatea

$$\lambda(s') = <x,\ t',\ n> \tag{4}$$

şi astfel încît

$$t'_1 \neq t'_2 \quad s'_1 \neq s'_2. \tag{5}$$

Rezumînd, putem deci spune că o structură de valorificare asociată unui limbaj poetic este o aplicaţie de forma (1), care îndeplineşte condiţiile (3), (4), (5) de îndată ce are loc relaţia (2).

Să notăm cu $\mathbb{S}(n,x)$ mulţimea semnificaţiilor s pentru care există t astfel încît să aibă loc relaţia (2). Ţinînd seamă de condiţia (3), rezultă că $\mathbb{S}(n,x) \subseteq \rho(x)$ pentru $n = 1, 2, \ldots$, deci mulţimea $\mathbb{S}(n,x)$ nu este de putere superioară continuului. Pe de altă parte, deoarece atît n, cît şi x parcurg cîte o mulţime numărabilă şi deoarece, în baza aplicaţiei (1), avem

$$\rho(x) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathbb{S}(n,x), \tag{6}$$

rezultă (ţinînd seamă că $\rho(x)$ este de puterea continuului) că fiecare mulţime $\mathbb{S}(n,x)$ este sau vidă, sau de puterea continuului. Aşadar: Fiind dat un limbaj poetic înzestrat cu o structură de valorificare, fiecare mulţime $\mathbb{S}(n,x)$ nevidă este de puterea continuului. Interpretarea acestui rezultat este următoarea: Dacă o persoană sesizează o frază aparţinînd limbajului poetic, atunci el o sesizează cu o infinitate de puterea continuului de semnificaţii.

I. I. Revzin (*On the continuous nature of poetic semantics*, „Poetics", vol.10, 1974) a criticat faptul că noi deducem continuitatea semanticii poetice exclusiv din faptul că, pentru fiecare cititor în parte, această semantică diferă de la un moment la altul, cu alte cuvinte continuitatea ei este o consecinţă a continuităţii parametrului timp. Revzin a arătat că putem evita o reprezentare atît de subiectivă a semanticii poetice. Vom prezenta, în cele ce urmează, ideile sale.

Infinitatea şi chiar nenumărabilitatea mulţimii de semnificaţii poetice pot fi explicate pornind de la structura

B.C.U. „M. EMINESCU" IAŞI

Scanned with CamScanner

internă a discursului poetic. În fapt, după cum observă Revzin, această idee este implicit conţinută în diferite părţi din *Poetica matematică,* unde noi accentuăm organizarea riguroasă a textului poetic (construcţia singulară a acestuia — pentru a utiliza limbajul formaliştilor ruşi). Această organizare conduce la o situaţie în care fiecare cuvînt al discursului poetic poate dobîndi o independenţă specifică şi, în acelaşi timp, să adere la anumite legături cu alte cuvinte, legături care-i contureaza înţelesul. Discursul poetic este deci dominat de tendinţe contradictorii. În cadrul acestora, relaţiile semantice pot să fie sau să nu fie în concordanţă cu cele sintactice. În principiu, orice marcă semantică a unui cuvînt poetic are o completă libertate de combinare cu mărcile semantice ale altor cuvinte. Această libertate nelimitată conduce la diferite fenomene de amalgamare semantică şi transpoziţie semantică.

Într-un mod mai riguros, situaţia menţionată poate fi descrisă în modul următor. Să considerăm un discurs poetic ale cărui elemente (de exemplu, cuvinte) sînt reprezentate în raport cu un număr de k mărci semantice, care pot fi combinate în diferite moduri. După cum se ştie, numărul combinaţiilor posibile cu aceste mărci este egal cu 2^k, deci numărul semnificaţiilor teoretic posibile ale discursului poetic considerat este egal cu 2^k. De obicei, aceste mărci semantice sînt distribuite pe diferite niveluri de generalitate. De exemplu, în raport cu exemplul considerat în fig.V.1, p.160 din *Poetica matematică* avem un prim nivel, cu două mărci, *abstract* şi *concret,* un al doilea nivel, cu patru mărci, *conceptual, neconceptual, terestru, non-terestru,* un al treilea nivel, cu opt mărci (printre care *senzorial, nesenzorial, animat, inanimat*), un al patrulea nivel, cu $2^4 = 16$ mărci (printre care : *uman, non-uman, uniregn, pluriregn*) şi un al cincilea nivel, cu $2^5 = 32$ mărci (printre care : *vegetal* şi *mineral*). Fiecare nivel conţine toate mărcile semantice ale nivelurilor precedente, însă gradul de ramificare, adică numărul nivelurilor, într-o astfel de clasificare a mărcilor semantice este practic nelimitat. Rezultă că mulţimea mărcilor semantice asociate unui discurs poetic este infinită, dar numărabilă. Însă mulţimea părţilor unei mulţimi numărabile nu este numărabilă ; dacă admitem ipoteza continuului, ea are puterea continuului. Ţinînd seamă de independenţa ipotezei continuului, obţinem două variante, după cum acceptăm sau nu această ipoteză. Alegem, în cele

ce urmează, prima variantă. Deci numărul cardinal al mulţimii de combinaţii posibile de mărci semantice este, într-un discurs poetic, de puterea continuului. De aici rezultă că mulţimea semnificaţiilor posibile ale unui discurs poetic este de puterea continuului.

După cum observă Revzin, nucleul argumentării de mai sus există în cartea noastră, de exemplu atunci cînd scriem (p.139): „Trebuie să ne amintim însă că mulţimea semnificaţiilor poetice este nenumărabilă şi, deci, mulţimea categoriilor semantice corespunzătoare ar trebui să fie infinită. Este adevărat că şi mulţimea semnificaţiilor exprimabile într-un limbaj ştiinţific este infinită, însă aici este vorba de o infinitate numărabilă, a cărei descriere cu ajutorul unei colecţii finite de categorii gramaticale nu este lipsită de plauzibilitate". Însă noi nu am tras consecinţele acestei situaţii.

Deosebirea esenţială între argumentarea noastră şi cea a lui Revzin constă în faptul că noi (urmînd ideile lui Servien) deducem natura continuă a semanticii poetice exclusiv din modul singular în care se realizează percepţia poeziei, în timp ce Revzin o deduce din principiile interne de organizare ale discursului poetic. Din acest rezultat, Revzin obţine un altul, care vine în întîmpinarea unor intuiţii cunoscute: limbajul poetic este construit împotriva principiului aditivităţii (conform căruia semnificaţia unui discurs este „suma" semnificaţiilor componentelor sale), deoarece orice combinaţie formată cu mărcile semantice de bază constituie o semnificaţie potenţială a discursului. Nu putem însă fi de acord cu Revzin atunci cînd contrapune, din acest punct de vedere, limbajul poetic limbajului ştiinţific, pretinzînd că acesta din urmă este construit după principiul aditivităţii. (O idee similară fusese susţinută anterior de către lingvistul american Paul Garvin). Nu este greu de văzut că chiar în componenta artificială (ca să nu mai vorbim de cea naturală) a limbajului matematic abundă „expresiile idiomatice", adică exact acele expresii a căror semnificaţie nu poate fi obţinută pe cale sintactică, adică nu este rezultatul compunerii semnificaţiilor termenilor care le alcătuiesc. Este oare semnificaţia expresiei

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

Scanned with CamScanner

rezultatul „compunerii" semnificațiilor lui $\int$, $f(x)$ și dx? Orice matematician știe că răspunsul este negativ.

Vom trece acum la studiul structurii topologice a semanticii poetice. Abia acum opoziția discret-continuu, formulată de Servien într-un mod parțial, dar căreia i s-au găsit ulterior mai multe surse (așa cum am văzut mai sus) își va dezvălui semnificațiile ei mai profunde. Vom indica două moduri de a introduce o topologie în $\mathcal{S}$, unul bazat pe relația operă-cititor (în spiritul ideilor lui Servien), altul, indicat de Revzin, bazat pe structura imanentă a textului poetic.

Cu ajutorul structurii de valorificare λ, vom defini o familie $\mathcal{F}$ de părți ale lui $\mathcal{S}^*$, după cum urmează: $E \in \mathcal{F}$ dacă există un număr natural n_1 astfel încît, pentru orice $n > n_1$, mulțimea $\mathcal{S}(n) - E$ să fie cel mult numărabilă. Semnificația familiei $\mathcal{F}$ este următoarea. O mulțime E de semnificații aparține lui $\mathcal{F}$ dacă, exceptînd cel mult o mulțime finită de persoane (cele pentru care $n \leqslant n_1$), E conține „aproape toate" semnificațiile sesizate de o persoană oarecare. Aici, prin „aproape toate" înțelegem „cu excepția unei mulțimi cel mult numărabile". Se demonstrează ușor că orice supramulțime a unei mulțimi din $\mathcal{F}$ aparține de asemenea lui $\mathcal{F}$, iar intersecția a două mulțimi din $\mathcal{F}$ aparține și ea lui $\mathcal{F}$. Vom spune că o structură de valorificare asociată unui limbaj poetic este completă (respectiv semicompletă) dacă $\mathcal{S}(n) \neq 0$ pentru orice n natural (respectiv $\mathcal{S}(n) \neq 0$ pentru o infinitate de valori ale lui n). Aici am notat

$$\mathcal{S}(n) = \bigcup_{x \in L} \mathcal{S}(n, x).$$

Nu este greu de demonstrat că într-un limbaj poetic cu structură de valorificare semicompletă familia $\mathcal{F}$ constituie un filtru asupra lui $\mathcal{S}^*$ (este suficient, pentru aceasta, de observat că partea vidă a lui $\mathcal{S}^*$ nu aparține lui $\mathcal{F}$). De aici rezultă că, adăugînd la $\mathcal{F}$ partea vidă a lui $\mathcal{S}$, obținem o topologie în $\mathcal{S}^*$. Această topologie este legată de structura de valorificare prin cîteva proprietăți: Spațiul topologic obținut este conex dacă și numai dacă structura de valorificare este semicompletă; este un spațiu Hausdorff dacă și numai dacă topologia spațiului este chiar topologia discretă în $\mathcal{S}^*$. Dacă spațiul topologic este un spațiu Haus-

Scanned with CamScanner

dorff, atunci structura de valorificare nu este semicompletă.

Revzin a arătat că metoda noastră de a topologiza mulțimea $\mathcal{S}^*$ poate fi adaptată ușor la punctul său de vedere asupra continuității semanticii poetice (s-a folosit aici și o sugestie a lui Miroslav Novotný, care a corectat o greșeală din varianta inițială a propunerii lui Revzin). Să notăm cu $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ frazele care alcătuiesc un limbaj poetic și să asociem acestuia o arborescență de mărci semantice cu o infinitate de niveluri. Să notăm cu $\mathcal{S}(k, x_n)$ mulțimea semnificațiilor frazei x_n din L, în raport cu nivelul de ordinul k al arborescenței. În felul acesta, fiecare semnificație din $\mathcal{S}(k, x_n)$ apare ca o combinație de mărci semantice situate la nivelul de ordinul k și asociate anumitor termeni ai frazei x_n. Să punem

$$\mathcal{S}(x_n) = \bigcup_{k=1}^{\infty} \mathcal{S}(k, x_n),$$

deci $\mathcal{S}(x_n)$ este mulțimea tuturor semnificațiilor posibile ale lui x_n. Nu rămîne acum decît să înlocuim în construcția noastră de mai sus pe $\mathcal{S}(n)$ prin $\mathcal{S}(x_n)$. Obținem astfel o topologie naturală, asociată structurii interne a limbajului poetic, în contrast cu topologia de mai sus, care este asociată relațiilor dintre limbajul poetic și posibilii săi receptori. Într-adevăr, în reprezentarea anterioară, mulțimea $\{1, 2, \ldots, k, \ldots\}$ este mulțimea receptorilor posibili, $\mathcal{S}(k; x)$ este mulțimea diferitelor semnificații cu care persoana k sesizează (la diferite momente) fraza x, în timp ce $\mathcal{S}(k)$ este mulțimea tuturor semnificațiilor poetice sesizate de către k. În reprezentarea de față, lucrurile se schimbă. Vom indica aici, în mod explicit, doar una dintre topologiile posibile. Să punem

$$\mathcal{S}^* = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{S}(x_n).$$

Fie $\mathcal{F}$ o familie de submulțimi ale lui $\mathcal{S}^*$, definită în modul următor: $E \in \mathcal{F}$ dacă există un întreg N pentru care, oricare ar fi $n > N$, diferența $\mathcal{S}(x_n) - E$ este o mulțime cel mult numărabilă. Reuniunea lui $\mathcal{F}$ cu mulțimea vidă constituie o topologie în $\mathcal{S}^*$. Semnificația acestei topologii

este următoarea. După cum s-a observat mai sus, mulţimea $\mathfrak{S}(x_n)$ este de puterea continuului; aceasta înseamnă că orice mulţime E nevidă a topologiei conţine aproape toate semnificaţiile poetice care sînt suficient de rafinate; mai precis, dacă ignorăm primele N fraze din L, oricare mulţime E a topologiei conţine aproape toate semnificaţiile limbajului poetic considerat. Amintim că prin „aproape toate" înţelegem „cu excepţia unei mulţimi cel mult numărabile". Condiţiile lingvistice de conexitate se transpun fără nici o dificultate de la topologia noastră la topologia lui Revzin.

Posibilitatea de a ignora primele n fraze din L admite, după Revzin, mai multe interpretări, printre care şi următoarea. Se discută uneori dacă universul poetic reprezentat în discursul poetic al unui mare poet P poate fi studiat independent de universurile poetice ale predecesorilor săi. Admiţînd că discursurile poetice ale acestor predecesori pot fi interpretate ca primele N fraze în discursul poetic al lui P (sau ca fiind echivalente cu acestea), se obţine un răspuns afirmativ la dilema de mai sus.

În toate dezvoltările de mai sus, semnificaţiile asociate unei fraze rămîn nediferenţiate în ceea ce priveşte contextul în care această frază este plasată. Am fost, din acest punct de vedere, consecvenţi cu Servien, care nu a condus analiza pînă în acel punct în care variabilitatea unei semnificaţii în raport cu contextul să devină pertinentă. Totuşi, opoziţia (20) ne atrage atenţia asupra caracterului esenţial al dependenţei semanticii poetice de contexte foarte largi. Acesta este motivul pentru care am propus Lianei Popa-Burcă să adapteze modelul anterior la cazul mai complicat al dependenţei contextuale. Iată cîteva rezultate obţinute în acest sens („Cahiers de linguistique théorique et appliquée", vol.10, 1973, fasc.1), mai întîi pe o cale algebrică, apoi pe o cale topologică.

Un context pe un vocabular V este o pereche ordonată $\langle u,v\rangle$ de fraze pe V. Fie $\mathfrak{C}$ mulţimea contextelor pe V şi fie L un limbaj pe V. Considerăm o aplicaţie φ a produsului cartezian $\mathfrak{C} \times L$ în mulţimea $\mathfrak{P}(\mathfrak{S}^*)$, unde $\mathfrak{P}$ semnifică mulţimea părţilor, iar $\mathfrak{S}^*$ este mulţimea semnificaţiilor care pot fi asociate frazelor din L. Un context $\langle u, v\rangle$ este adecvat unei semnificaţii s din $\mathfrak{S}^*$, în raport cu L, dacă există o frază x în L pentru care semnificaţia s aparţine lui $\varphi(\langle u,v\rangle, x)$. Fiind date două contexte $\langle u,v\rangle$ şi $\langle u',v'\rangle$, spunem că avem $\langle u,v\rangle \dashv \langle u',v'\rangle$ dacă

Scanned with CamScanner

$\mathcal{S}(<u,v>) \subseteq \mathcal{S}(<u',v'>)$, unde $\mathcal{S}(<\alpha,\beta>)$ este mulţimea semnificaţiilor pentru care contextul $<\alpha,\beta>$ este adecvat. Relaţia $\dashv$ este reflexivă şi tranzitivă. Ea se poate relativiza în raport cu o frază x:

$$<u,v> \underset{x}{\dashv} <u',v'>$$

dacă $\varphi(<u,v>, x) \subseteq \varphi(<u',v'>,x)$. Mai departe, fiind dată o familie $\mathcal{F}$ de fraze din L, vom pune

$$<u,v> \underset{\mathcal{F}}{\dashv} <u',v'>$$

dacă relaţia $\dashv$ are loc în raport cu orice x din $\mathcal{F}$. Se poate arăta că din faptul că două contexte sînt în relaţia $\underset{L}{\dashv}$ rezultă că ele sînt în relaţia $\dashv$. Pentru un limbaj L lipsit de sinonimie are loc şi reciproca, adică din $\dashv$ rezultă $\underset{L}{\dashv}$. În particular deci, pentru un limbaj poetic, cele două relaţii sînt echivalente.

Relaţia $\dashv$ se pretează unui studiu de tipul celui dezvoltat în cartea noastră *Lingvistica matematică* (1966) relativ la aşa-numitele relaţii de dominare (capitolul IV). Extinzînd această denumire la relaţia de faţă, vom spune că o familie $\mathcal{C}_1$ de contexte domină familia $\mathcal{C}_2$ dacă orice context din $\mathcal{C}_1$ domină orice context din $\mathcal{C}_2$. Dacă orice context care domină pe $\mathcal{C}$ aparţine lui $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}$ este o mulţime iniţială. Reuniunea dintre $\mathcal{C}$ şi contextele dominate de $\mathcal{C}$ este categoria semantic-contextuală generată de $\mathcal{C}$; o notăm cu $G(\mathcal{C})$. În cazul particular în care $\mathcal{C}$ este o clasă de echivalenţă în raport cu relaţia de dublă dominare, $G(\mathcal{C})$ este o categorie semantic-contextuală elementară. Indicele de omonimie semantică al unui context este egal, prin definiţie, cu numărul de categorii semantic-contextuale elementare care-l conţin.

Pentru a include şi componenta contextuală în abordarea topologică a semanticii poetice, L. Popa-Burcă extinde structura de valorificare asociată lui L, definind o aplicaţie λ a lui $\mathcal{S}^*$ în $L \times R \times N \times \mathcal{C}$, în aşa fel încît, pentru orice s din $\mathcal{S}^*$, $\lambda(s) = <x,t,n, \gamma>$, unde s este una dintre semnificaţiile frazei x în contextul γ şi există un moment $t_0 > t$ pentru care din $t < t' < t_0$ rezultă existenţa unei semnificaţii s' pentru care $\lambda(s') = <x,t',n,\gamma>$, iar $t'_1 \neq t'_2$ implică $s'_1 \neq s'_2$.

Scanned with CamScanner

Să notăm cu $\mathcal{S}(n,x,\gamma)$ mulţimea semnificaţiilor frazei x, sesizate de către individul n în contextul γ. Din proprietăţile lui λ rezultă că $\rho(x)$ — mulţimea semnificaţiilor lui x — se obţine ca reuniune a mulţimilor $\mathcal{S}(n,x,\gamma)$ cînd γ parcurge pe $\mathcal{C}$, iar n parcurge toate numerele naturale. În loc însă să ţinem fixă fraza x, putem ţine fix individul n, notînd cu $\mathcal{S}(n)$ mulţimea semnificaţiilor sesizate de n (mulţime care se va obţine ca reuniune a mulţimilor $\mathcal{S}(n,x,\gamma)$ cînd γ parcurge pe $\mathcal{C}$, iar x parcurge pe L). Se poate defini acum o topologie în $\mathcal{S}^*$, imitînd întocmai procedeul din cazul acontextual. Fie τ_1 familia acelor mulţimi E din $\mathcal{S}^*$, pentru care există un număr natural N, astfel încît, pentru $n > N$, mulţimea $\mathcal{S}(n) - E$ este numărabilă. Adăugînd la τ_1 mulţimea vidă, obţinem o topologie τ, ale cărei mulţimi închise sînt foarte „sărace" (fiind cel mult numărabile), în timp ce mulţimile deschise sînt foarte apropiate de mulţimea tuturor semnificaţiilor poetice. Defectul acestei topologii stă tocmai în acest fapt, în virtutea căruia mulţimea semnificaţiilor sesizate de către un individ după un anumit moment t nu mai poate aparţine topologiei τ. Pentru a remedia această situaţie, se poate defini o nouă topologie, avînd ca suport chiar mulţimea $\mathcal{S}(n,x,\gamma)$(loc. cit., pp. 60—61).

În prezentarea noastră, semiotica muzicală preconizată de Servien a căzut pe un plan secundar. Dar actualitatea ei nu poate fi trecută cu vederea. Punînd pe primul plan ideea de transformare (a se vedea capitolul 19 din *Estetica* sa), Servien a anticipat numeroase preocupări actuale, dintre care vom menţiona pe acelea întreprinse la noi în ţară de către Mihai Brediceanu, în ceea ce priveşte transformările topologice şi mecanismele generative în creaţia muzicală şi de către Bogdan Cazimir în legătură cu tratarea uniformă a transformărilor melodice cu ajutorul regulilor generative de tip Lindenmayer (*Sémiologie musicale et linguistique mathématique*, „Cahiers de linguistique théorique et appliquée", vol.11, 1974, nr.2, pp.231—238).

Incursiunea de mai sus a fost, credem, suficientă pentru a demonstra cît de mult este contaminată cercetarea actuală în poetica teoretică de gîndirea lui Pius Servien. Modernitatea lui Servien constă în faptul că el a anticipat nu numai ca idee, dar şi ca tehnică de investigaţie, punctul de vedere contemporan conform căruia estetica trebuie să-şi elaboreze un metalimbaj cît mai distinct de limbajul

Scanned with CamScanner

obiect. Dar aceasta a fost doar una dintre direcţiile gîndirii sale (pe care totuşi o considerăm cea mai importantă). În studiul ritmului (pe care l-am formalizat parţial în *Poetica matematică*), Servien a adus nu doar o definiţie aritmetică riguroasă, dar şi un ansamblu de observaţii de detaliu, deosebit de pătrunzătoare (a căror dezvoltare ulterioară poate fi urmărită în investigaţiile de fineţe efectuate la noi în ţară de către Mihai Nasta asupra ritmului în poezia greacă ; a se vedea şi cercetările Lidiei Sfîrlea, în „Studii de limbă literară şi filologie", Ed. Academiei, 1969). În cercetările sale de filozofia ştiinţei, Pius Servien a abordat probleme delicate privind bazele epistemologice ale teoriei probabilităţilor şi ale fizicii moderne (*Sur les fondements des mathématiques*, 1939, *Probabilités et physique*, 1945, *Probabilités et quanta*, 1948). Încă în 1947, marele fizician Erwin Schrödinger şi-a exprimat interesul pentru această direcţie a cercetărilor lui Servien, cercetări în cadrul cărora se operează distincţia dintre „observabile" şi „noţiuni matematice", care ulterior avea să devină frecventă în metodologia ştiinţelor speculative.

Scanned with CamScanner

GRIGORE C. MOISIL

Inițial urma să intre în cadrul acestei cărți și un capitol consacrat lui Grigore C. Moisil. Între timp, însă, ne-am dat seama că mai avem nevoie de un răgaz pentru a putea evalua semnificația și efectul măcar al cîtorva din ideile și rezultatele sale. Sîntem, probabil, încă prea aproape de personalitatea sa umană, științifică și culturală, de amănuntele vieții sale cotidiene, de iubirile și adversitățile care l-au înconjurat, pentru a putea întreprinde analiza lucidă pe care o dorim. Vom încerca, deocamdată, să conturăm aici cîteva aspecte și probleme, cîteva întrebări și ipoteze care vor trebui, credem, să facă ulterior obiectul unor investigații mai profunde.

Una din preocupările constante care ne-au urmărit în această carte a fost aceea de a plasa fiecare personalitate discutată într-o anumită serie culturală sau științifică, de a-i stabili deci predecesorii și continuatorii, atît la noi, cît și pe plan mondial. Născut în Dobrogea, venit ca profesor la București, după un stagiu îndelungat în Moldova, dar cu un arbore genealogic urcînd departe în istoria Năsăudului și a Maramureșului, de unde vine de fapt Grigore C. Moisil ? Se plasează, cumva, în seria unor figuri ilustre bine determinate, așa cum G. Călinescu se situează în tradiția care trece prin Cantemir, Hasdeu și Nicolae Iorga ? Înzestrat cu o capacitate rară de a înțelege sensul de dezvoltare a lucrurilor, atunci cînd acesta este încă nedeslușit ; cu un simț dezvoltat al paradoxului ; maestru al contra-argumentării, pe care o practica nu din dorința de a contrazice, ci pentru a scoate în evidență pluralitatea de aspecte și tendințe ; ferment capabil să stîrnească adeziunea entuziastă sau dezacordul total, dar niciodată plictiseala și indiferența ; generos și deschis în lupta intelectuală ; cu o aplecare spre filozofie și visare care nu este străină de stilul de gîndire al profesorului său, Dimitrie Pompeiu ; cu un umor uneori sarcastic, alteori binevoitor, de tentă

moldovenească, Gr. C. Moisil pare a fi, în cultura românească, o prezență căreia cu greu i s-ar putea găsi spița. Era un maestru al expunerii orale, cu harul argumentației spontane (ne-a mărturisit odată că a învățat să vorbească liber, fiind constrîns la aceasta de faptul că dicțiunea sa devine imposibilă la lectură). O modalitate importantă pe care o practica în expunere era aceea a nuanțării necontenite a accentului. Lucrurile, ideile nu se desfășurau niciodată ca și cum ar fi la fel de importante sau de neimportante. Odată cu ordinea lor liniară se contura și ierarhia lor. Rostea cu o mlădiere unică a glasului o expresie care în matematică revine mereu, ori de cîte ori este vorba de un proces cu o infinitate de etape: „Și așa mai încolo...", „Și așa mai departe...".

Insistăm asupra acestor date personale ale lui Gr. C. Moisil, deși ele vor fi din ce în ce mai puțin în stare să evoce prezența sa materială de o originalitate puțin obișnuită. Gr. C. Moisil trebuia să fie văzut și auzit, o mare parte din farmecul său stînd în această prezență direct tangibilă, așa cum cuprinderea unui vers nu poate fi despărțită de expresia sa materială. Chiar (sau poate mai ales) în intervențiile sale spontane sau improvizate, Gr. C. Moisil dezvolta o observație pătrunzătoare, care trecea dincolo de teritoriul accesibil simțului comun, pentru a ajunge la adevărurile mai profunde, care de multe ori sînt neverosimile. Ceea ce unora părea un simplu joc de cuvinte era rodul unei gîndiri științifice autentice, al unei experiențe umane de o mare complexitate.

Alături de Simion Stoilow, Miron Nicolescu și Gheorghe Vrănceanu, Gr. C. Moisil făcea parte din pleiada de mari profesori matematicieni de care Universitatea din București s-a bucurat începînd cu deceniul al cincilea al secolului nostru; acei distinși profesori care, împreună cu unii străluciți predecesori, aveau să devină marii șefi de școală ai matematicii românești. Gr. C. Moisil a format nu o școală, ci cîteva școli (printre care una de mecanică, una de logică matematică și una de teoria algebrică a mecanismelor automate). Acest lucru se explică prin fecunditatea ideilor sale, prin măiestria cu care știa să prezinte nu o matematică „gata făcută", ci una care se construia în prezența auditoriului și în care problemele deschise, aspectele susceptibile de a fi ameliorate erau totdeauna subliniate. Gîndirea sa era esențialmente deschisă, în conformitate

Scanned with CamScanner

cu observaţia pe care atît de pregnant a formulat-o undeva: „Nici o problemă nu are granițe. Orice răspuns are multe''.

În fiecare domeniu în care a lucrat, Gr. C. Moisil şi-a legat numele de o idee, un fapt, o metodă. A intuit importanța logicilor cu mai multe valori, într-o vreme cînd acestea păreau doar o bizarerie, pentru ca apoi să le găsească aplicaţii surprinzătoare în tehnică. Punctul de vedere al lui Moisil se racordează cu cel al lui Lotfi Zadeh (creatorul teoriei mulţimilor *fuzzy*), prin aceea că ideea de *fuzzy set* poate fi privită ca o extensiune a unui predicat în logica cu o infinitate de valori, logică faţă de care logicile cu un număr finit de valori sînt doar nişte aproximaţii. Dealtfel, acest punct de vedere fusese deja schiţat de către Moisil în unele articole anterioare. Originalitatea acestui punct de vedere, care reţine, din structura conceptelor vagi, nu atît aspectul impreciziei, ci mai mult pe cel al nuanţării, a fost recunoscută de către specialişti, aşa cum rezultă şi din prefaţa cărţii recente a lui A. Kaufmann consacrată teoriei lui Zadeh şi aplicaţiilor ei.

Gr. C. Moisil este un pionier al metodelor funcţionale în mecanică şi în geometria diferenţială. Publicarea, de către Editura Academiei, a operei sale matematice, publicare care începe în curînd cu un volum cuprinzînd contribuţiile în domeniul teoriei ecuaţiilor cu derivate parţiale şi aplicaţiilor ei în geometria diferenţială şi continuă cu un al doilea volum, în care vor intra contribuţiile în domeniul mecanicii, va facilita reconsiderarea corespunzătoare a meritelor lui Moisil ca deschizător de drumuri în ceea ce priveşte folosirea metodelor analizei moderne în mecanică şi în geometria diferenţială.

Dar, probabil că trăsătura specifică dominantă a operei lui Moisil constă în proiectarea unui spirit algebric în cele mai diferite domenii ale matematicii. Numărul mare al lucrărilor sale de analiză nu trebuie să înşele; esenţa lor este de cele mai multe ori algebrică. Gr. C. Moisil a excelat în dezvăluirea unor ipostaze algebrice a unor fapte importante de analiză. Acest spirit algebric răspîndit în toate lucrările sale (în cele de logică şi de mecanisme automate faptul acesta este cu deosebire frapant) conferă operei sale o perfectă unitate, în ciuda extraordinarei ei varietăţi tematice.

Chiar într-o analiză atît de succintă ca cea de faţă, tre-

buie să consemnăm activitatea lui Gr. C. Moisil în domeniul lingvisticii. În primul rînd, să amintim că, alături de prof. Alexandru Rosetti și de prof. Miron Nicolescu, Moisil a militat pentru dezvoltarea preocupărilor de lingvistică matematică în România, încă din anul 1958, cînd acest domeniu abia apăruse și a activat, alături de aceștia, în cadrul Comisiei de lingvistică matematică a Academiei (condusă de Emil Petrovici; actualmente, această comisie a fost reorganizată sub conducerea prof. Alexandru Rosetti). Tot alături de prof. Rosetti, Moisil a pus, din 1962, bazele publicației „Cahiers de linguistique théorique et appliquée", care de atunci duce în lume mesajul lingvisticii matematice românești. Sub conducerea sa au avut loc primele experimente de traducere atomată în țara noastră (algoritmul fiind elaborat de E. Nistor pentru traducerea din engleză în română și experimentat pe calculatorul MECIPT al Universității din Timișoara).

Moisil nu a publicat multe lucrări de lingvistică matematică. Dar cele cîteva lucrări publicate sînt de o profundă originalitate, ele poartă „marca Moisil". Este vorba mai întîi de ciclul consacrat problemelor puse de traducerea automată, ciclu care începe cu un articol asupra preliminariilor traducerii automate (în „Limba română", 1960) și continuă cu un articol asupra conjugării verbelor (în „Studii și cercetări lingvistice", vol.11, 1960, nr.1, pp.7—29), un altul asupra declinării (în „Cahiers de linguistique théorique et appliquée", vol.1, 1962, pp.123—134) și un al treilea privind microsintaxa verbului (în „Cahiers de linguistique théorique et appliquée", vol.2, 1965, pp.165—189). Nu există, în aceste articole, nici o formulă, nici o tehnică matematică, dar ele sînt impregnate de gîndire matematică, ele aduc, într-un domeniu atît de bătătorit, ca cel al gramaticii limbii române, cîteva idei proaspete, care realizează un spor de rigoare de care acest domeniu avea de multă vreme nevoie. Vom menționa astfel ingeniozitatea cu care este demonstrată importanța considerării mai mult ca perfectului drept criteriu principal în conjugarea mecanică a verbelor românești, metoda literelor variabile în descrierea analogului grafic al alternanțelor consonantice sau vocalice („Studii și cercetări lingvistice", vol.11, 1960, nr.1, pp.7—24), analiza inedită a diatezei reflexive și a categoriei tranzitivității. O combinatorică deosebit de naturală, lipsită de orice prejudecată tributară gramaticilor

şcolare, conduce la o taxinomie originală a verbelor, substantivelor şi adjectivelor. Clasificările morfologice întreprinse de Moisil, metodologia sa au avut în vedere limba română scrisă, deoarece porneau de la exigenţele de rigoare ale traducerii automate, traducere care se referă la ipostaza grafică a limbilor naturale. Dar, aşa cum se întîmplă cu toate ideile fecunde, investigaţiile lingvistice ale lui Moisil au depăşit interesul lor iniţial, devenind un permanent termen de referinţă în cercetările lingviştilor români şi străini privind structura morfologică a limbii române (Minerva Bocşa, Constantinescu-Dobridor, Paula Diaconescu Jiri Felix, Valeria Guţu-Romalo, Maria Manoliu-Manea, E. Nistor, Ion Pătruţ sînt doar o mică parte dintre cei care au utilizat clasificările lingvistice ale lui Moisil).

Deosebit de semnificativ pentru demersul lui Moisil este articolul său „Asupra conjuncţiei *şi*" (Omagiu lui Alexandru Rosetti la 70 de ani", Ed. Academiei, Bucureşti, 1965, pp.587—591), unde se construieşte o ierarhie de expresii construite cu ajutorul lui „şi", expresii de ordinul întîi fiind cele formate cu cuvinte aparţinînd aceleiaşi părţi de vorbire, iar expresiile de ordinul n fiind cele formate prin conjuncţie a expresiilor de ordinul $n-1$. Moisil pune în evidenţă faptul că, cu ortografia limbii române scrise, putem forma expresii de ordinul al doilea, dar *nu* putem forma expresii de ordinul al treilea. De asemenea, Moisil arată că limba română scrisă nu dispune de mijloacele necesare pentru a distinge diferite tipuri de asocieri ale unor grupe de termeni, în cadrul unei construcţii obţinute prin conjuncţie. În contrast cu această situaţie, scrierea formulelor logicii matematice şi ale calculului algebric elementar este capabilă de aceste distincţii, datorită utilizării parantezelor.

În 1971, Moisil prezintă, în cadrul cursurilor de vară şi colocviilor ştiinţifice de la Sinaia, o conferinţă care consemnează cîteva din principiile de bază ale gîndirii lui Moisil („Cantitate şi structură în lingvistica matematică", Univ. din Bucureşti, Sinaia, 25 iulie — 25 august 1971): Lingvistica matematică se prevalează în primul rînd de matematica structurală; imprecizia conceptelor lingvistice poate fi tratată cu ajutorul teoriei mulţimilor vagi a lui Zadeh şi, în particular, a lui Gentilhomme.

Mediul optim al gîndirii moisiliene a fost acela al legăturilor interdisciplinare, mai întîi între discipline mate-

matice, apoi între matematică şi alte discipline. Istoria ştiinţei româneşti va trebui să consemneze faptul că Moisil a fost, în deceniile al şaselea şi al şaptelea ale secolului nostru, unul dintre cei mai mari animatori pe care i-a cunoscut ştiinţa românească, o adevărată instituţie de integrare culturală, polarizînd cele mai variate preocupări de creaţie ştiinţifică şi artistică. Iată doar cîteva idei pentru care a militat:

a) Alături de metoda obişnuită de reducere a studiului mulţimilor infinite la cel al mulţimilor finite, deci de aproximare finită a infinitului, matematica actuală pune în evidenţă şi aproximarea finitului cu ajutorul infinitului.

b) Matematica clasică a fost o matematică a numericului, a cantităţii. Odată cu începutul secolului nostru, pe măsură ce se dezvoltă topologia şi algebra modernă, logica matematică, teoria categoriilor şi alte ramuri „calitative" ale matematicii, matematica îşi deplasează atenţia de la cantitate spre structură. Matematica contemporană este prin excelenţă una structurală, în opoziţie cu cea anterioară, care era cantitativă.

c) Prin trecerea de la etapa numerică la cea structurală, matematica dobîndeşte o aplicabilitate universală, care decurge din chiar dialectica ei internă şi din „metabolismul" ei firesc cu celelalte discipline; nici un domeniu nu se mai poate sustrage razei de acţiune a matematicii.

d) Datorită celor observate la punctul precedent, caracterul din ce în ce mai aplicativ al matematicii nu numai că nu se opune tendinţelor de abstractizare din ce în ce mai înaltă, dar este tocmai o consecinţă a acestor tendinţe.

e) Dezvoltările aplicative fecunde sînt tocmai cele care decurg din dialectica internă a dezvoltării ştiinţei, nu cele care pleacă de la un deziderat exterior acestei dezvoltări.

f) Apariţia şi dezvoltarea calculatoarelor electronice implică modificări fundamentale atît în optica fiecărei ştiinţe în parte, cît şi în întreaga organizare a vieţii sociale. (Consecvent cu acest principiu şi întrezărind mai devreme decît alţii înnoirea pe care calculatoarele electronice aveau s-o determine în viaţa socială, Gr. C. Moisil a creat Centrul de calcul al Universităţii din Bucureşti şi a pledat cu pasiune şi convingere pentru o reorganizare corespunzătoare a cercetării şi învăţămîntului matematic românesc. În

1972 a lansat un amplu document programatic privind învățămîntul informaticii în universitate, document pe care avem datoria morală să-l studiem și să-l dezbatem, deoarece actualitatea problemelor pe care le atacă nu numai că nu a scăzut, dar continuă să crească).

g) Așa cum matematica clasică, predominant cantitativă, numerică, a fost urmată de matematica modernă, a structurilor (legiferată prin tratatul lui N. Bourbaki), aceasta din urmă este, la rîndul ei, depășită de matematica „foarte modernă" născută din fenomenele consemnate la punctul f.

h) Preocupările interdisciplinare tind să se constituie ca partea cea mai interesantă și mai plină de perspective a activității de cercetare și creație.

i) Una dintre cele mai importante consecințe ale situației semnalate la punctul precedent o constituie faptul că întreaga cultură contemporană se încheagă într-o unitate organică, devenind imposibil să se mai despartă cultura umanistă de cultura tehnico-științifică. În particular, vechea opoziție a lui Pascal dintre spiritul geometric și spiritul de finețe devine perimată, matematica actuală devenind un instrument deosebit de adecvat pentru înregistrarea nuanțelor sub care se manifestă aspectele de finețe.

Deosebit de incomode pentru toți cei care cu greu pot ieși din deprinderi în care se află deja ancorați, aceste idei pot fi, desigur, puse în discuție. Dar, independent de aceasta, modul în care ele sînt elaborate în scrierile lui Gr. C. Moisil le conferă o înaltă valoare metodologică, filozofică și umană. Procedeele sale de argumentare obligă pe cititor la o reacție intelectuală care poate merge de la revelație pînă la construirea unor contraargumente de natură să stimuleze dezbaterea intelectuală.

*

În special în ultimii ani ai vieții sale, m-am apropiat de acest om al desfătării intelectuale, capabil să exercite un efect de vrajă asupra unor interlocutori dintre cei mai diferiți, printre care mă număram. L-am putut urmări în cele mai variate situații, i-am observat ritmul activității. Cu un entuziasm de adolescent, trecea de la un curs ținut la Facultatea de matematică, de medicină, de drept, de filozofie sau de limbă și literatură română la o lecție pentru

Scanned with CamScanner

elevii nu ştiu cărei clase de matematică, pentru ca apoi să primească vizitele lungi ale unor tineri colaboratori, de-a lungul cărora improviza adevărate prelegeri ştiinţifice şi morale, după care, cu o prospeţime care-mi va rămîne totdeauna o taină, era gata să ţină o conferinţă profundă şi glumeaţă deopotrivă, care captiva publicul cel mai eterogen. Iar seara, tîrziu, la masa de lucru, preocupat de elaborarea propriilor sale lucrări ... Prin toate aceste ipostaze, Gr. C. Moisil trecea menţinîndu-şi o stare de spirit tonică, rămînînd tot timpul (chiar cînd se certa!) jovial şi (chiar la mînie) senin. Trăindu-şi epicureic fiecare clipă, fixînd cu o privire pătrunzătoare obiectul nevăzut al curiozităţii sale intelectuale, Gr. C. Moisil savura cînd murmurul interior al propriei sale gîndiri, cînd dialogul cu interlocutori care-i puneau la încercare tăria argumentelor. L-am observat de multe ori fredonînd în surdină o melodie de demult sau îngînînd interiorizat cursul propriilor sale impresii.

Într-unul din dialogurile sale imaginare, publicat în 1970 în „Contemporanul", Gr. C. Moisil făcea una dintre observaţiile cele mai caracteristice pentru mentalitatea sa profund refractară inerţiei şi rutinei, lenei de gîndire şi spiritului retrograd:

„Se ştie că o idee începe prin a fi un paradox, continuă prin a fi o banalitate şi sfîrşeşte prin a fi o prejudecată ..."

„Îmi place să urmăresc lunga poveste cînd o idee banală devine prejudecată. Cînd se înrăieşte ca omul care îmbătrîneşte, care simte că-i fuge pămîntul de sub picioare, care trebuie să facă apel la autoritatea lui. Cînd tot farmecul tinereţii lui s-a iaurţit în autoritate".

Trecem peste stilul atît de specific moisilian al acestor rînduri, stil care şi el va trebui să facă obiectul unui studiu atent (cred că şi Arghezi l-ar fi invidiat pentru o creaţie lexicală atît de viguroasă ca verbul *a iaurţi* într-un context care-i conferă o atît de stranie conotaţie), pentru a ne opri la tîlcul lor revelator, la densitatea lor intelectuală. Aflăm poate aici resortul atitudinilor sale faţă de ştiinţă, faţă de oameni, faţă de viaţă. Ceea ce face un mare poet cu cuvintele, nelăsîndu-le să ruginească, menţinîndu-le mereu într-o stare sărbătorească, făcea Moisil cu ideile, imprimîndu-le o perpetuă mobilitate, care nu le lăsa nici un moment să alunece în banalitate sau în prejudecată. Tinereţea

sa învingătoare aceasta era: capacitatea de a fi mereu autentic, de a respinge orice autoritate, alta decît aceea a inteligenței.

Inepuizabil în energie și inteligență, uriaș în capacitatea de a-i molipsi pe alții de pasiunea căutării și de sensibilitate față de treburile obștești, savantul, profesorul și cetățeanul Grigore C. Moisil a strecurat în fiecare gest și în fiecare gînd al său o adîncă iubire față de oamenii acestui pămînt și acestui timp. Spectacolul de idei pe care l-a oferit culturii noastre rămîne ca un moment de permanentă referință.

Cum l-am putea uita?

Scanned with CamScanner

DE ACELAŞI AUTOR

Scanned with CamScanner

1. *Lingvistică matematică. Modele matematice în lingvistică*, Ed. Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1963, 220p.
2. (în colaborare cu acad. M. Nicolescu şi N. Dinculeanu) *Analiză matematică*, vol.1, Ed. Didactică şi Pedagogică, 1965.
3. (în colaborare cu acad. M. Nicolescu şi N. Dinculeanu) *Analiză matematică*, vol.2, Ed. Didactică şi Pedagogică, 1965.
4. *Lingvistică matematică*, ed. a II-a cu patru capitole noi, Ed. Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1966, 254p.
5. *Gramatici şi automate finite*, Ed. Academiei, Bucureşti, 1964, 256p.
6. *Noţiuni de analiză matematică*, Ed. Ştiinţifică, Bucureşti, 1966.
7. (în colaborare cu Ed. Nicolau şi S. Stati) *Introducere în lingvistica matematică*, Ed. Ştiinţifică, Bucureşti, 1966, 336p.

7′. (în colaborare cu Ed. Nicolau şi S. Stati) *Introduzione alla linguistica matematica*, Casa editrice Riccardo Patron, Bologna, 1970.

8. *Algebraic Linguistics: Analytical Models*, Academic Press, New York-London, 1967, XIV + 254p.
9. *Introduction mathématique à la linguistique structurale*, Dunod, Paris, 1967, XII + 282p.
10. *Algebraické modely jazyka*, Academia, Praga, 1969.
11. *Teoretiko-množestvennye modeli jazykov*, Nauka, Moscova, 1970.
12. *Poetica matematică*, Ed. Academiei, Bucureşti, 1970, 400p.

12′. *Matematische Poetik*, Ed. Academiei, Bucureşti-Athenäum Verlag, Frankfurt am Main, 1973, 437p.

12″. *Matematicka poetika*, Nolit-Beograd, 1974, 373p.

12‴. *Poetica matematica*, Casa editrice Riccardo Patron, Bologna, 1975.

13. (în colaborare) *Semiotica folclorului. Abordare lingvistico-matematică*, Ed. Academiei, Bucureşti, 1975.

INDICE DE NUME

Scanned with CamScanner

CUPRINS

COLI DE TIPAR: 14, — TIRAJUL: 1700 EX.
BUN DE TIPAR: 3. XI. 1975.

INTREPRINDEREA POLIGRAFICĂ CLUJ
MUNICIPIUL CLUJ-NAPOCA STR. BRASSAI NR. 5—7
REPUBLICA SOCIALISTĂ ROMÂNIA
COMANDA NR. 366/1975



Scanned with CamScanner



EDITURA ȘTIINȚIFICĂ ȘI ENCICLOPEDICĂ

Este o obligație față de opera științifică a predecesorilor de a o reconsidera în mod periodic și de a o reciti cu înțelegerea pe care ne-o dă cea mai recentă dezvoltare a științei. Vom constata atunci că operele științifice autentice se află într-o continuă devenire; ele nu sînt obiecte, ci procese a căror evoluție depășește intențiile inițiale ale autorului. În această perspectivă sînt analizate, în cartea de față, unele idei și rezultate datorate lui M. Nicolescu, D. Pompeiu, S. Stoilow, Fl. Vasilescu, Alex. Froda, D. Barbilian, P. Servien, M. Ghyka, Gr. C. Moisil ș.a. Selecția a fost determinată, într-o mare măsură, de elemente care țin de biografia științifică a autorului acestei cărți. Cartea este, în primul rînd, un mănunchi de mărturisiri ale unor experiențe care l-au adus pe autor în contact cu cîteva opere și personalități remarcabile ale culturii românești.

Lei 8,50

Scanned with CamScanner